CURSO DE APERFEIÇOAMENTO

EM TÉCNICAS

DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

CONVÊNIO UFP/SUDENE

COM A COLABORAÇÃO DO

INEP/CRPE DO RECIFE

1º Vol.

JULHO - AGOSTO - 1972

RSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

CONVÊNIO UFP/SUDENE

Planejamento e Pesquisa Educacional

por

Profª. Maria Lais Mousinho Guidi

Carga horária - 15 hs.

ETIVO: Verificar em que medida a pesquisa tem acompanhado as exigências do planejamento educacional e a sua contribuição ao processo de mudança no desenvolvimento tecnológico, econômico e social do Brasil.

GRAMA PROVISÓRIO :

- O Planejamento educacional e os critérios para seleção de temas de pesquisa.
- A Pesquisa Educacional no Brasil: balanço e perspectivas.
- Metodologia e técnicas das pesquisas realizadas no INEP, análise e critica dos trabalhos:
  - Expectativas profissionais e educacionais dos estudantes do segundo ciclo de nível médio no Estado da Guanabara.
  - Escolarização e mão-de-obra industrial e comercial.
- A pesquisa educacional como fundamento de decisão.

ALHO PRÁTICO: Avaliação de um instrumento de coleta de dados de uma das pesquisas analisadas no curso. Esse trabalho poderá ser feito em grupos, havendo depois a discussão e a compatibilização entre eles.

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TECNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

CONVÊNIO UFP/SUDENE

DISCIPLINA : Contabilidade Nacional
PROFESSORA : Tania Bacelar
CARGA HORÁRIA : 12 Horas
HORÁRIO : dias - 8/8 - Tarde
9/8 - Tarde
10/8 - Manhã e Tarde
TESTE DE AVALIAÇÃO : Dia 12/8 (juntamente com Introdução à Econom)

PROGRAMA : 1. INTRODUÇÃO

1.1 - Contabilidade Nacional, conceito e utilidade
1.2 - Os elementos da Contabilidade Nacional
1.3 - As Entidades, as transações e os objetos Econômicos.
1.4 - O problema da Contabilidade Nacional nos paises subdesenvolvidos.

2. A CONTABILIZAÇÃO DOS AGREGADOS MACROECONOMICOS

2.1 - O valor bruto da produção
2.2 - O produto interno bruto e o valor agregado bruto.
2.3 - A depreciação ; o produto e a renda líquidos
2.4 - Os impostos indiretos e os subsidios; o produto e a renda A CUSTO DE FATOR E A PREÇO DE MERCADO
2.5 - A renda líquida dos fatores do exterior; o produto e a renda nacional.
2.6 - A integração entre os diversos agregados.

3. O SISTEMA DE CONTAS NACIONAIS DO BRASIL

3.1 - A composição do sistema e o conteudo das contas.
3.2 - As estimativas.

4. O PRODUTO E O INVESTIMENTO DO NORDESTE

4.1 - Apresentação geral da pesquisa
4.2 - A metodologia para contabilização destes agregados no setor EDUCAÇÃO

DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HORÁRIA : Itens 1 .... 2 horas
2 .... 4 horas
3 .... 3 horas
4 .... 3 horas
TOTAL .... 12 horas

SISTEMÁTICA : Item 1 - Apresentação oral, com auxilio de transparencias

Item 2 - Apresentação oral, com transparencias e exercicios.

Item 3 - Apresentação oral, com transparencias e seminário.

Item 4 - Apresentação oral e seminário.

BIBLIOGRAFIA :

1- CONJUNTURA ECONOMICA - Rio de Janeiro, Fund. Getulio Vargas, vol.25, n.9, 1971.

2- FIGUEIREDO, Ferdinando de Oliveira - Introdução à contabilidade nacional. Rio de Janeiro, Forense, 1971.

3- SUDENE; Assessoria Técnica - Produto e formação bruta de capital do Nordeste. Recife, SUDENE, 1971.

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

CONVÊNIO UFP/SUDENE

Disciplina : Contabilidade Nacional
(reprodução das transparências)

1. CONTA DE PRODUÇÃO
Cr$ 1 000 000 000,00

1.1 Produto Interno Líquido (ao custo de fatôres) (2.6)
 I Setor Primário
 II Setor Secundário
 III Setor Terciário
1.2 Impostos indiretos (3.5)
1.3 Menos: Subsídios (3.2)
1.4 Depreciação do capital fixo (5.4)
1.5 Importação de mercadorias e serviços (4.3)
TOTAL DA OFERTA FINAL DE BENS E SERVIÇOS

1.6 Consumo Pessoal (2.1)
1.7 Consumo do Govêrno (3.1)
1.8 Formação Bruta de capital fixo (5.1)
 I Setor Governamental
 II Setor Privado
1.9 Variação de estoques (5.2)
1.10 Exportação de mercadorias e serviços (4.1)

TOTAL DA PROCURA FINAL DE BENS E SERVIÇOS

2. CONTA DE APROPRIAÇÃO
Cr$ 1 000 000 000,00

2.1 Consumo Pessoal (1.6)
2.2 Impostos diretos (3.6)
2.3 Renda líquida enviada para o exterior (4.4)
2.4 Outras receitas correntes do Govêrno (3.7)
2.5 Poupança do setor primário (5.3)

TOTAL DA DESPÊSA

2.6 Renda Interna Líquida (ao custo de fatôres) (1.1)
 I. Setor urbano
Remuneração do trabalho
Remuneração mista do trabalho e capital
Lucros, juros e aluguéis
 II. Setor agrícola
2.7 Tranferências (3.3)
TOTAL DA RENDA

3. CONTA CORRENTE DO GOVÊRNO
Cr$ 1 000 000 000,00

3.1 Consumo do Govêrno (1.7)	3.5 Impostos indiretos (1.2)
3.2 Subsídios (1.3)	3.6 Impostos diretos (2.2)
3.3 Tranferências (2.7)	3.7 Outras receitas correntes (2.4)
3.4 Poupança (5.5)	
TOTAL DA DESPÊSA	TOTAL DA RECEITA

4. CONTA DAS TRANSAÇÕES COM O EXTERIOR
Cr$ 1 000 000 000,00

4.1 Exportação de mercadorias e serviços (1.10)	4.3 Importação de mercadorias e serviços (1.5)
4.2 Saldo do Balanço de Pagamento em Conta-Corrente (5.6)	4.4 Renda líquida enviada para o exterior (2.3)
TOTAL DE RECEBIMENTOS DO EXTERIOR	TOTAL DE PAGAMENTOS AO EXTERIOR

5. CONTA CONSOLIDADA DE CAPITAL
Cr$ 1 000 000 000,00

5.1 Formação Bruta de Capital Fixo (1.8)	5.3 Poupança líquida do setor privado (2.5)
5.2 Variação de Estoques (1.9)	5.4 Depreciação do capital fixo (1.4)
	5.5 Poupança em Conta-Corrente do Govêrno (3.4)
	5.6 Saldo do Balanço de Pagamentos em Conta-Corrente (4.2)
TOTAL DA FORMAÇÃO DE CAPITAL	TOTAL DE RECURSOS PARA FORMAÇÃO DE CAPITAL

MODÊLO DE INSUMO - PRODUTO

COMPRAS ↓ / VENDAS →	PRODUÇÃO INTERMEDIÁRIA				PRODUÇÃO FINAL (DEMANDA FINAL)				VBP
	1	2	3	ST	C	I	X	ST	
1. Agricultura 2. Indústria 3. Serviços ST Importações ST + Importações	A				B				
Remun. Trabalho Remun. Capital Remun. Rec. Naturais Lucro Depreciação Imp. Ind. Subs. Valor Agregado (RIS pm)	C								
VBP									

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

LABORATÓRIO DE ESTATÍSTICA

Os dados contidos na tabela devem ser trabalhados pelo participante, seguindo o roteiro estabelecido abaixo. Para facilitar, estamos indicando as distribuições que deverão ser utilizadas. Ei-las:

IDADE
20 - 29
30 - 39
40 - 49
50 - 59
60 - 70

SALÁRIO
100 - 199
200 - 299
300 - 399
400 - 499
500 - 599
600 - 700

TEMPO DE SERVIÇO
0 - 5
6 - 11
12 - 17
18 - 23
24 - 30

TESTE X
70 - 75
76 - 81
82 - 87
88 - 93
94 - 100

TESTE Y
44 - 51
52 - 59
60 - 67
68 - 75
76 - 83
84 - 91
92 - 100

HORAS EXTRAS
60 - 64
65 - 69
70 - 74
75 - 79
80 - 84
85 - 89
90 - 95

PROBLEMA 1

Construir, baseado nos dados da amostra estabelecida na tabela B, as seguintes tabelas:

1.1 De idade
1.2 De salário mensal
1.3 De tempo de serviço
1.4 De notas do teste X
1.5 De notas do teste Y
1.6 De horas extras
1.7 De idade x sexo
1.8 De idade x estado civil
1.9 De idade x côr
1.10 De salário mensal x sexo

PROBLEMA 2

Construir o histograma e o polígono de frequência das tabelas dos itens 1.1, 1,2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, do Problema 1

PROBLEMA 3

Calcular as frequências acumuladas "acima de" e "abaixo de", elaborando também as respectivas representações gráficas das tabelas dos itens 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, do Problema 1

PROBLEMA 4

Calcular a média, mediana e moda, das tabelas dos itens 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, do Problema 1

PROBLEMA 5

Calcular o Q_1, o Q_3, o D_3, o D_6, o P_{10}, o P_{90} e P_{85} das tabelas dos itens 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6 do Problema 1

PROBLEMA 6

Calcular o desvio-médio, o desvio -quartil e o desvio-padrão das tabelas dos itens 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, e 1.6 do Problema 1.

PROBLEMA 7

Calcular a assimetria e a curtose das tabelas dos itens 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, e 1.6 do PROBLEMA 1

PROBELMA 8

Com a média e o desvio-padrão das tebalas 1.1 e 1.2 do Problema 1, calcular

a) A percentagem situada entre 1,52S e 1,00S

b) A percentagem situada entre ∓ 1,35S

c) A percentagem situada entre - o,54S e 1,50S

d) A f aixa dos 50% centrais

e) A faixa dos 30% primeiros

f) A faixa dos 20% últimos

PROBLEMA 9

Calcular a média de idade dos brancos e dos pardos.

PROBLEMA 10

Calcular a média de salário do grupo feminino.

__________ X __________ X __________ X __________

/ma

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO

BIBLIOGRAFIA FUNDAMENTAL

1 - BOWMAN, M.T. - The human investment revolution in economic thought; Sociology of Education, v.39, 1966.

2 - BRASIL, Encontro Internacional de Estudos Brasileiros 1º Seminário de Estudos Brasileiros - A educação no Brasil. São Paulo, USP- Instituto de Estudod Brasileiros, 1971.

3 - BRASIL, Presidência da República - Metas e bases para a ação do Govêrno. Brasília, Presidência da República, 1970.

4 - COOMB, Philip - La recherche en matiére de planification. In: Planification de l'Education; notes sur les besoins nouveaux en matiére de recherche. Belgica, UNESCO - Intitut Internacional de Planification de l'Education, 1970.

5 - CORRÊA, Arlindo - Pesquisa e planejamento educacional. Rio de Janeiro, CNRH/IPEA, 1969.

6 - DUARTE, Sérgio Guerra - Que é a reforma de ensino?. Rio de Janeiro, MNS, 1972.

7 - FORACCHI, Marialice & PEREIRA, Luiz - Sociedade e educação. São Paulo, Ed. Nacional,

8 - GOUVEIA, Aparecida J. - A pesquisa educacional no Brasil. São Paulo, Fundação Carlos Chagas, 1971.

9 - KERLINGER, F. - Foundation of behavioral research, NY, Halt Rimehart Winston, 1964.

10- POIGNANT, M.Raymond - L'integration de la planification de l'education dans la planification economique et sociale; seminário. Rio de Janeiro, 1970.

11- SELLTIZ, G.e outros - Metodos de investigação das relações sociais. São Paulo, Herder, 1968.

12- SIMPOSIO SOBRE PESQUISAS PARA O PLANEJAMENTO EDUCACIONAL. Ciência e Cultura. São Paulo, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, v.23, n.6, dez/71

COMPLEMENTAÇÃO:

1 - REVISTA BRASILEIRA DE ESTUDOS PEDAGÓGICOS - Diversos números.

2 - REVIEW OF EDUCATIONAL RESEARCH - nº 32 e 50.

mc/19

um acidente histórico. Completando o pensamento do perito da UNESCO, o conceito de pesquisa em educação deve englobar sem exceção, todos os problemas e aspectos do processo e do trabalho educacional, partindo dos sistemas, da análise dos custos e de produtividade, da metodologia do ensino e de outros objetivos da educação para chegar ao conjunto das funções do sistema, não só inclusivamente, mas em relação à sociedade global.

Os currículos e programas da Universidade davam um sentido muito mais restrito ao conceito "pesquisa educacional" , mantendo-o associado a questões pedagógicas / que giravam em torno do aluno e do professor e dos métodos de ensino. Essas pesquisas, chamadas de psicopedagógicas, tiveram uma validade prática, não resta dúvida, mas estavam / distanciadas da realidade administrativa, econômica, sócio-cultural e política. Era uma abordagem estreita da pesquisa educacional que se revelou pouco fecunda. Problemas importantes, dentro de contextos sócio-econômicos, foram negligenciados com : relevânciados objetivos, ordenação das prioridades e as suas consequênciasno ensino assim com no planejamento, reforma da administração, adaptação dos sistemas de ensino À evolução de situação, formação e recrutamento docente, rigor científico e, principalmente, coleta de dados, tratamento estatístico (quando existia), abordagem multidisciplinar, avaliação dos recursos financeiros e humanos , etc. Essa ausência de planejamento educacional tem inibido o setor empírici porque a sua necessidade não é reconhecida seus resultados não são publicados e seu financiamento não é atendido. A pesquisa, por tudo isso que seria oportuno analisar, torna-se escassa, inconseqüente, desarticulada e estéril.

Temas de pesquisa

A pesquisa pode ser efetuada em uma situação local ou nacional para responder a necessidades nacionais (muitas implicam em tipos universais de problemas) ou a pesquisa pode ser comparada, cobrindo um amplo leque de situações locais e visando uma compreensão mais profunda de certos problemas de base que são comuns a numerosos países.

Uma outra abordagem pode ser feita quando se procura descobrir princípios e metodologias de ensino que podem ter utilidade em grande número de situações diferentes.

A pesquisa também pode ser intencional para servir ao planejamento do ensino, mesmo que êle seja incipiente, quando procura explicação ou resposta a problemas de base como: aumento do número de professores e melhoria de / sua situação sócio-economica e técnico profissional, adaptação de programas às necessidades locais de trabalho e exigências da mão-de-obra etc., trata-se de classificar nessa categoria, estudos sócio-econômicos assim como de mudança social, demográficos, linguísticos, de mercado de trabalho, dos recursos destinados à educação, dos custos do ensino, da educação permanente, das instituições extra-escolares de ensino etc.

Consideremos aqui apenas uma ótica global e, ao mesmo tempo, restrita de estratégia de pesquisa educacional procurando a maior produtividade dos programas de pesquisas. Não é volume das pesquisas mas a sua natureza e qualidade que poderão apresentar respostas a problemas reais e cruciais. Daí a necessidade de um programa centrado na demanda social do ensino para que esteja a força do progresso.

Essa estratégia poderá ser resumida nos seguintes itens :

1. Análise dos sistemas de ensino
2. Ensino supletivo e educação permanente
3. Custos do ensino
4. Recursos homanos das escolas
5. Mudança de curriculos e do conteúdo dos programas
6. Tecnologias educativas
7. Integração do ensino ao meio
8. Institucionalização da pesquisa e intercambio entre pesquisadores.

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TECNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO
CONVÊNIO UFP/SUDENE

TECNICAS DE PESQUISA

O questionário

1 - CONCEITO

O questionário consiste em uma série de perguntas, organizadas a fim de coletar dados para uma pesquisa, cujas respostas são fornecidas pelo informante ao pesquisador sem a assistência direta do investigador ou uma série de perguntas centradas numa hipótese básica precisa para que as respostas possam ser dadas pelo informante ou pesquisado sem a presença (face a face) do pesquisador.
É enviado ao informante ou pesquisado pelo correio ou portador, sendo do mesmo modo devolvido ao investigador, ou aplicado a um grupo de pessoas simultaneamente, como por exemplo a uma turma de alunos.

2 - UTILIZAÇÃO :

2.1 - Quando é grande o número de informantes ou pesquisados.
2.2 - Quando os informantes ou pesquisados estão dispersos.
2.3 - Quando os recursos (humanos e financeiros) são limitados.

3 - APLICAÇÃO :

3.1 - Realizar, previamente, a observação participante.
3.2 - Anexar uma carta de apresentação (se possível individual) -"apelo"- expondo os objetivos da pesquisa de maneira breve, clara e simples, dando a identificação do patrocinador, nome e endereço da instituição

com o número do telefone, se possível, garantindo o anonimato quando for o caso e formulando agradecimento.

3.3 - Dar, por escrito, as instruções para o preenchimento das questões de uma maneira breve, clara e simples, como na carta.

4 - CONDIÇÕES EXIGIDAS PARA O ÊXITO DA APLICAÇÃO :

4.1 - Interesse do informante ou pesquisado pelo assunto. (o questionário não é meio de obter dados ou fazer levantamentos preliminares)

4.2 - Nível médio de instrução do informante ou pesquisado.

4.3 - "Status" e accessibilidade do informante.

4.4 - Tempo reduzido de trabalho, questionários longos levam ao desânimo.

5 - APRESENTAÇÃO MATERIAL DO QUESTIONÁRIO :

5.1 - Papel de boa aparência

5.2 - Diagramação estética

5.3 - Espaço suficiente, mas limitado para as respostas.

6 - FORMULAÇÃO E NATUREZA DAS QUESTÕES :

6.1 - Número reduzido de perguntas

6.2 - Iniciar com perguntas neutras

6.3 - Questões que permitam respostas sucintas, sim ou não, um número, uma palavra

6.4 - Questões objetivas que separem os fatos da ficção.

6.5 - Perguntas que permitam respostas dispensando consulta prévia.

6.6 - Questões cujas respostas confirmem umas as outras.

6.7 Ordenação, gradação e conexão com a hipótese central.

6.8 - Imaginar antecipadamente os modelos, isto é, as tabelas simples, duplas e triplas.

6.9 - Verificar o significado de cada resposta a ser dada.

6.10 - Preparar simultaneamente o código

OBSERVAÇÃO: Realizar, sempre, um pre-estudo ou pre-teste do questionário, aplicando-o a um grupo de indivíduos com as características de população a ser estudada.

mc/026

A entrevista

A entrevista consiste num interrogatório direto do informante ou pesquisado pelo pesquisador ou entrevistador, durante uma conversa face a face.

- Pode-se dizer que a entrevista é o instrumento por excelência e o mais constatemente usado pelos pesquisadores, em geral.
- Deve-se recorrer à entrevista, sempre que não se encontram os dados necessários em regištros ou fontes documentárias
- Os dados obtidos através de narração livre têm mais valor do que informações obtidas por interrogatórios.
- Usar a entrevista para conhecer opiniões, atitudes e crenças.
- Evitar a entrevista para obtenção de dados de valor incerto.

Preparo da entrevista

- O pesquisador deve organizar o roteiro da entrevista, delineando cuidadosamente o objetivo a alcançar.
- Obter, antecipadamente, algum conhecimento do informante
- Marcar a entrevista, local, dia, hora.
- Criar uma situação discreta.

Desenvolvimento da entrevista

- Obter e manter a confiança do entrevistado.
- Procurar situações favoráveis para a entrevista.
- Facilitar a espontaneidade do entrevistado.
- O entrevistador deve mais ouvir qu falar.
- Apresentar primeiro as perguntas menos sujeitas a recusas
- Fazer uma pergunta de cada vez para não confundir o entrevistado.
- Evitar perguntas que sugiram as respostas ou levem a informações gerais.
- Registrar os dados imediatamente ou na primeira oportunidade que se apresentar.

OBSERVAÇÃO: Quando o entrevistador não for o próprio pesquisador ele deve conhecer os objetivos da pesquisa e a importância dos dados a colher. Como no caso do formulário e do questionário os roteiros de entrevista devem ser testados antes de sua aplicação.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

1 - CHAPIN, F.Stuart - Field work and social research. New York, The Century Co., 1920.

2 - DOLLAND, John - Critorice for the life history. New Haven, Yale University Press, 1935.

3 - GOODE, William & HATT, Paul - Método em pesquisa social São Paulo, Ed. Nacional, 1960.

4 - NOGUEIRA, Oracy - Pesquisa social; uma introdução às suas técnicas. São Paulo, Ed. Nacional, 1968.

5 - ROCHA E SILVA, Maurício - Preparo e significação de um trabalho científico. Ciência e Cultura, São Paulo , SBPC, 11(3), jul.,1950.

6 - YONG, Pauline V. - Scientific Social Surveys and Research. The American Journal of Sociology 54(3), nov.,1948.

mc/028

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TECNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO
CONVÊNIO UFP/ SUDENE

Pesquisa Escolarização e Mão-de-obra

ROTEIRO DE ENTREVISTA COM DIRETORES E/OU PROFESSORES DE ESCOLAS TÉCNICAS

1 - Em sua opinião, quais as principais deficiências que trazem, do curso primário e ginasial, os alunos que se matriculam nos cursos técnicos ? (Fornecer resposta detalhada. Por exemplo, se há falhas em matemática, dizer onde elas residem: operação com decimais, calculos de percentagem, medidas, representações gráficas etc.)

2 - Se há provas de ingresso, de que constam elas e onde se concentram as mais graves e freqüentes falhas dos concursados ? Anexar um exemplo das provas à entrevista.

3 - Que sugestões teria o Sr. a oferecer , para a melhoria do ensino de 1º grau, de modo a aumentar o rendimento do aluno nos cursos técnicos ?

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO DA EDUCAÇÃO
CONVÊNIO UFP/SUDENE

Título do Projeto: Pesquisa sôbre as condições sócio-econômicas dos professôres primários brasileiros.

Entidade responsável pela execução do Projeto: Centro Brasileiro de Pesquisas Educacionais - INEP

I - ANÁLISE DA SITUAÇÃO

Apreciando-se o ensino primário brasileiro em seu aspecto quantitativo, em face às taxas de evasão, reprovação e conclusões de curso, conclui-se que é baixíssimo o rendimento encontrado.

Considerando as taxas relativas a cada unidade federada, vemos que a reprovação no curso primário / chega a alcançar 2/3 da matrícula efetiva e a do 1º ano mais de 75% das crianças.

Levando-se em conta o Brasil em conjunto, cada aluno que é promovido está custando cêrca de 170 % do custo aluno-ano, pois que mais de 40% dos alunos se estão evadindo ou sendo reprovados e recomeçando no ano seguinte seus estudos do mesmo ponto em que o fizeram um ano antes. Um melhor emprêgo do investimento em educação parece essencial, principalmente se considerarmos que a falta de um mínimo de qualidades do ensino está concorrendo em muitos casos para a formação de desajustados.

Numa busca entre as complexas causas que possam ser responsáveis pela situação alarmante do ensino primário brasileiro é preciso levar em conta o papel capital que é exercido pelo professor para um rendimento adequado nessa área da educação.

Pesquisas já realizadas provaram que o professor primário brasileiro, de um modo geral, não está recebendo o preparo adequado à função que lhe cabe exercer, e, além disto, os salários atribuídos aos mestres (de um modo geral, baixos, chegando em muitos casos a ser irrisórios) concorrem para agravar de muito o problema, pois ocasionam a evasão dos professôres capacitados e conseqüente ampliação do número de professôres leigos.

mc/030

II - OBJETIVOS

Levando em conta a situação existente, propomo-nos a realizar um levantamento das condições sócio econômicas dos professôres primários brasileiros.

Serão analisadoss os seguintes aspectos:

- qualificação do magistério
- estímulo para o exercício da docência
- sistemas de promoção
- condições de trabalho
- status social
- remuneração
- previdência e assistência social

Os resultados desta pesquisa permitirão caracterizar a situação e planejar possíveis soluções, tendo em vista a melhoria das condições dos professôres primários, o que se refletirá em aumento do rendimento do trabalho e conseqüente elevação do nível da educação do grau primário no Brasil.

III - DESCRIÇÃO DO PROJETO

A. A duração prevista para o Projeto é de 2 anos - dezembro de 1967 a dezembro de 1969.

B. Dados gerais sôbre a realização da pesquisa

1 - Amostra (Anexo 1) - Compõe de 1586 professôres municipais e 4.604 professôres estaduais de 412 municípios brasileiros, num total de 6.190 professôres, abrangendo todas as unidades da Federação, exceto o Território de Fernando de Noronha.

A escolha dos informantes e dos municí - pios foi feita randômicamente.

O número de informantes foi calculado / proporcionalmente, tendo em vista o total da população docente - municipal ou estadual - do Brasil.

Os municípios foram sorteados em cada região fisiográfica de todas as unidades da Federação.

A amostra inclui, portanto, representantestes de todas as regiões fisiográficas de cada unidade da Federação, tendo sido o número desses informantes determinado proporcionalmente.

2 - Instrumentos

. Um questionário com 73 itens para ser respondido pelos professôres municipais (Anexo2)

. Instruções para aplicação desse questionário (Anexo 3)

. Um questionário com 72 itens para ser respondido pelos professôres estaduais (Anexo 4)

. Instruções para aplicação desse questionário (Anexo 5)

3 - Forma de aplicação

Remessa, pelo correio ou por via aérea dos questionários, que foram enviados às pessoas encarregadas de coordenar o trabalho em cada unidade da Federação , elementos esses que foram, de um modo geral, indicados pelos Secretários de Educação e Cultura.

Sugeriu-se que, em caso de necessidade, fosse pedida a colaboração de supervisores, delegados de ensino, agentes do IBGE ou de outros elementos, desde que qualificados para aplicarem os questionários, segundo as informações que os acompanham.

4 - Apuração dos resultados

Etapas:

. Controle de recebimento dos questionários (Anexo 6)

. Codificação dos instrumentos

. computação dos dados

. estabelecimento de correlações

. análise dos dados

IV - FORMA DE APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Em relatório, no qual serão tratadas separadamente as várias unidades da Federação, professôres estaduais e municipais, e das diferentes zonas e níveis de preparação apresentando-se, em seguida, a análise geral da situação dos professôres primários do Brasil.

CURSO DE APERFEIÇOAMENTO EM TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO
DA EDUCAÇÃO
CONVÊNIO UFP/SUDENE

PROJETO

Pesquisa sôbre escolarização e mão-de-obra na Guanabara

Ao se associar os conceitos de educação e preparação da mão-de-obra, com vistas à integração dos mesmos e sua aplicação apropriada na estratégia do desenvolvimento, existem três planos distintos em que essa vinculação ocorre:

1 - a preparação e capacitação da mão-de-obra atuante.
2 - o aproveitamento e recuperação da mão-de-obra ociosa subempregada.
3 - a formação integral da mão-de-obra em potencial ou seja, aquela que, em futuro breve, deverá compor os escalões mais jovens da fôrça-de-trabalho da sociedade.

Os dois primeiros planos, referentes à população econômicamente ativa, exigem formas de atuação educativa ajustadas à emergência da situação, pois tratam de suprir, com presteza, lacunas de formação escolar através de possibilidades didáticas de imediato rendimento no emprego.

O último plano, diz respeito ao sistema escolar formal e às suas modernas incumbências pedagógicas de orientação para o trabalho.

A presente pesquisa propõe-se a estudar o binômio escolarização formal e preparação de mão-de-obra, tendo pois delimitado o seu campo de ação ao terceiro dos planos supracitados.

As razões da pesquisa

A organização de pesquisa resultou de dois impulsos motivadores: primeiro, a necessidade inadiável de se conhecer de modo mais nítido as assintonias entre o que a escola ensina e o que o trabalho exige; segundo, o movimento pedagógico em favor da extensão da escolaridade e a conseqüente implantação da escola integrada, cujo desempenho satisfatório depende do conhecimento objetivo das necessidades sociais e das tendências vigentes no sistema de emprego de nível menos elevado.

Desenvolvimento dos trabalhos

A pesquisa envolverá as seguintes etapas:

a) Consulta, através de questionário anexo, aos empregados integrantes da amostra abrangendo ocupações de uma prova de escolarização.
b) Consulta aos empregadores, aos quais se aplicará o anexo roteiro de entrevista.
c) Consulta aos diretores e professôres de escolas técnicas por meio de entrevistas com roteiro anexo.
d) Tratamento estatístico do material e interpretação
e) Área geográfica abrangida: o Estado da Guanabara, inicialmente, Porto Alegre e Recife.

Apostila 1

Natureza e fundamentos do método estatístico.

1. Métodos Científicos.
2. Conceito, origem e desenvolvimento da Estatística.
3. O uso e interpretação das estatísticas.

1. Métodos Científicos

Para compreendermos bem qual o conceito atual de Estatística, é interessante examinarmos como se tem formado êste conceito através dos tempos.

Em tôdas as ciências, os fatos vêm sempre antes das teorias, e isto é bastante claro, dado sòmente ser possível elaborar teoria com a existência de fatos anteriormente observados.

O fato, nasça êle naturalmente ou da arte, representa a espontâneidade do fenômeno; a ciência vem depois, com suas reflexões sôbre divisão, coordenação, sistematização e estudo.

Também na Estatística, as teorias não surgiram de improviso; foram requeridos períodos mais ou menos longos de preparação, durante os quais eram observados e recolhidos aquêles fatos que haveriam de proporcionar a matéria necessária para a construção das teorias.

O homem adquiriu conhecimento de modos os mais diversos. Alguns dêles foram revelados ao acaso. Entretanto, nos últimos 150 anos, o progresso no conhecimento humano foi devido ao desenvolvimento dos métodos de aprendizagem, chamados métodos científicos, requerendo antes de mais

Poderíamos definir "Método Científico" como "etapas sucessivas pelas quais se vão descobrindo novas relações entre fenômenos vinculados a um determinado ramo científico, ou aspectos ainda não revelados de um determinado fenômeno".

O Método é, fundamentalmente, o mesmo para / tôdas as ciências, consistindo em:

a) formulações de questões ou proposições de problemas;
b) efetuação das observações;
c) registro das observações feitas;
d) respostas às perguntas formuladas, ou resoluções dos problemas propostos; e
e) revisão das conclusões anteriores, comparando-as com as novas respostas encontradas.

O mais conhecido dos métodos científicos e o que, indubitàvelmente, se tem revelado o mais fecundo, é o chamado método experimental.

É clássica a experiência de Galileu que, tendo sua atenção despertada pelo oscilar dos candelabros de uma catedral, experimentalmente comprovou, através de uma série de experiências, que havia uma relação entre o comprimento e o pêndulo; pôde, do mesmo modo, descobrir posteriormente, um a um, os efeitos da atração da gravidade, da pressão barométrica, etc.

O importante na experiência de Galileu é notar que o método consiste em manter constantes tôdas as causas, salvo uma, e variar esta de maneira que o cientista possa descobrir seus efeitos, caso existam; tal método, chamado

[illegible]

Foi o método experimental um fator decisivo no processo do conhecimento, que se iniciou com Galileu, Kepler e Newton; Galileu se valeu do método experimental para comprovar a lei da queda dos corpos e suas teorias sôbre os movimentos dos corpos; Kepler o aplicou para demonstrar as leis dos movimentos dos planetas; e Newton para demonstrar a lei da atração universal.

Entretanto, muitas vêzes, os homens desejam descobrir fatos em campos em que o método experimental não pode ser aplicado. Suponhamos, por exemplo, que alguém desejasse descobrir as causas determinantes dos aumentos dos preços de certo cereal na capital pernambucana, Recife. Na aplicação do método experimental teria forçosamente que conservar constantes tôdas as variáveis, com exceção de uma que seria modificada; posteriormente, outra sofreria modificação, permanecendo constantes as demais.

Intuitivamente poderíamos constatar a impraticabilidade de tal método para o estudo acima. Teríamos, se quiséssemos realizar pelo método experimental, de conservar constantes o salário da população, o gôsto dos consumidores, o nível geral dos preços, etc. o que é impraticável sob todos os pontos de vista. É impossível, nas Ciências Sociais, a aplicação do método experimental.

Entretanto, os fatos sociais exigiram que o homem aplicasse ou elaborasse um outro método que satisfizesse, em parte, a série de indagações feitas pelas Ciências / Sociais, que necessitavam ser respondidas; êsse outro método (ou conjunto de métodos) é o denominado <u>método estatístico</u>.

trabalhar com variáveis constantes, admitimo-las variando do mesmo, registrando as variações de tôdas as causas em ação e procurando determinar, no resultado final, que influências cabe a cada uma delas. Nas condições comuns êsse método é muito mais difícil que o experimental e os resultados obtidos são em geral menos precisos e satisfatórios.

A classificação dos métodos, em experimental e estatístico, é arbitrária, nada tendo de objetiva; geralmente, o cientista em qualquer trabalho usa quase sempre elementos de ambos, numa combinação estatístico - experimental. A Física e a Astronomia, reconhecidas como ciências exatas, deram origem a importantes métodos estatísticos. Os cientistas "exatos" muitas vêzes são forçados a combinar o método estatístico com os processos experimentais, enquanto o cientista social pode e deve usar certa dose de contrôle em suas investigações.

O método estatístico começa com a observação de um fenômeno, estabelecendo uma série de valôres suficientemente grande, para permitir a sua análise e ordenação em séries; a seleção dos dados, a fim de excluir aquêles que não devem ser considerados; a sua representação gráfica, o seu ajustamento, eliminação ou minimização dos êrros intrínsecos; o estudo posterior das relações entre os diversos valôres, para estabelecimento das leis que produzem o fenômeno.

Da aplicação da estatística ao estudo da população resultou a Demografia; também aos estudos da Sociologia e Economia, a Estatística tem dado uma contribuição inestimável, principalmente nesta última, dando ensejo ao Professor Marshall afirmar que a Estatística é o bar

Teoria Estatística - ou, simplesmente, Estatística, é a exposição dos métodos estatísticos.

Entretanto recentemente entrou em uso a palavra "estatística" com outro sentido; é a designação de estimativa baseada em dados experimentais, mediante amostras.

Êste conceito de estatística foi introduzido por R. A. Fisher em oposição a parâmetro, também por êle introduzido. Um parâmetro é um elemento numérico (com a média, o desvio - padrão, o coeficiente de correlação) usado para caracterizar uma população ou universo, enquanto que estatística é uma estimativa de determinado parâmetro obtida pela observação de amostra do respectivo universo.

Para têrmos uma noção do que seja a Estatística, temos que ter em conta as causas que provocaram seu aparecimento.

Os homens sempre possuiram uma curiosidade acentuada para saber quanto têm, quanto ganharam, quantos são. E esta curiosidade os levou a construir as primeiras estatísticas, fazendo o Pentateuco (um dos livros da Bíblia) menção a um censo realizado pelos israelitas, ordenado por Moisés, quando da estada do povo judeu no deserto, razão pela qual se tem dado, ao referido livro bíblico, o nome de Números.

Na China, 550 anos a.C., Confúcio revelava que, no ano 2.238 a.C., o rei Yao tinha ordenado a realização de um completo levantamento agrícola, industrial e comercial no país. Poder-se-ia aqui ainda citar centenas de fatos, ocorridos em passado remoto, que falavam da necessidade de levantamentos estatísticos, inclusive um diálogo pregava, insistentemente, aos homens que governavam o país, a necessidade de desenvolver ao máximo, as indagações quantitativas.

Entretanto, as origens da Estatística científica tiveram início na metade do século XVIII, quando passou a ser considerada uma disciplina autônoma que tinha por objetivo a descrição das coisas do Estado, vindo assim a ter uma sistematização orgânica que respondia a princípios doutrinais.

O fundador desta Estatística científica foi Herman Conring (1.600 - 1.681), professor de Filosofia, Medicina e Política da Universidade de Helmstadt, que inaugurou em 1.660 um curso de Ciência Política, em que descrevia e examinava as questões fundamentais do Estado. Seus continuadores foram, dentre muitos, M.Schmeitzel (1.679 - 1.767) e Godofredo Achenwall (1.719 - 1.782) que mais tarde chegou a suplantar a fama do próprio Conring. Achewall teve o mérito de haver consolidado definitivamente a posição da nova ciência na Universidade, dando-lhe o nome de Estatística, nome que o próprio Achenwall reconhece não ser nôvo já que fôra usado em 1.589,na Itália,por Ghilini.

Achenwall definiu a Estatística como sendo a "ciência das coisas que pertencem ao Estado", acrescentando que enquanto "a política ensina como devem ser os Estados" a "Estatística explica como o são realmente".

Em 1.741 apareceram as tábuas numéricas, as primeiras das quais foram atribuídas ao dinamarquês Anchersen (1.700 - 1.765) e, em 1.758, Busching (1.724 - 1.793) enriqueceu a técnica estatística do método comparativo, com um pequeno manual publicado em Hamburgo.

Posteriormente surgiram os aritméticos políticos, na Inglaterra, concomitantemente à Estatística Universitária a suas obras Teoria analítica da probabilidade (1.818) e Ensino Filosófico sôbre as probabilidades (1.814), completando a obra de Bernoulli.

O Cálculo da probabilidade ensinava a deduzir, partindo das probabilidades dos fenômenos elementares, as probabilidades dos fenômenos mais complexos que resultavam da combinação daqueles. Seus primeiros adeptos estimavam, para tanto, que se podia prever, baseando-se no cálculo das probabilidades, tôda classe de sucessos, quando fôssem conhecidas as probabilidades dos fenômenos que compunham ditos sucessos. Aplicaram o cálculo das probabilidades a tôdas as espécies de fenômenos, não sòmente aos sociais e políticos, que já eram estudados pela escola dos aritméticos políticos, como também aos fenômenos jurídicos, eleitorais, meteorológicos, físicos, etc. sendo que, os representantes da tendência enciclopedicomatemática, insignes matemáticos, tiveram o grande mérito de dotar a Estatística de um poderoso instrumento de investigação.

A partir de Laplace, as duas disciplinas, Cálculo das Probabilidades e Estatística, que até aquêle momento tinham permanecido separadas, fundiram-se de maneira que o Cálculo das Probabilidades constitui o alicerce matemático da Estatística, esta tomando extraordinário desenvolvimento.

Com o Cálculo das Probabilidades desenvolveu-se a Teoria dos êrros, graças a obra de Gauss e do próprio Laplace, que elaboraram por processo matemático a resolução do problema fundamental da teoria dos êrros.

Pouco a pouco a tendência enciclopedicomatemática foi sendo aperfeiçoada, principalmente por Adolfo Quetelet e Augustin Cournot. O primeiro, belga, matemático, astrônomo, me et le developpment de les facultés", também chamada "Essai de physique sociale" (1.838), apoiou as investigações numéricas no cálculo das probabilidades, elaborando as bases da metodologia estatística e se servindo do método para estudar a população e as qualidades físicas e normais do homem. O segundo, francês matemático, economista e filósofo, desenvolveu as suas investigações nas teorias das probabilidades, sôbre todo o campo da Economia. Em sua obra "Exposé de la théorie des chances e des probabilités", (Paris, 1.843), faz uma exposição sôbre a teoria do cálculo das probabilidades e suas aplicações à Estatística.

Recentemente, as investigações econômicas realizadas com o método quantitativo receberam a denominação de "Econometria".

Atualmente, a Estatística moderna conta com nomes de vulto que, elaborando fecundos estudos estatísticos, escrevendo monografias metodológicas e fazendo aplicações particulares, têm contribuído para um aperfeiçoamento cada vez maior da metodologia estatística, dentre os quais podemos citar: Galton, Pearson e Fisher.

O primeiro criou entre outras teorias a de Regressão, que com a Correlação, desenvolvida por Pearson, constituem um dos pontos mais fecundos nas aplicações da Estatística.

Finalmente, Fisher, partindo da inferência estatística de Pearson, estruturou de forma vigorosa a teoria de Pearson, em particular a teoria das pequenas amostras e da estimativa.

A Teoria Estatística, modernamente, se divide em dois grandes campos: a Estatística Descritiva e a Estatística Indutiva.

<u>Estatística Descritiva</u> - consiste num conjunto de métodos que ensinam a reduzir uma quantidade de dados bastante numerosa por um número pequeno de medidas, substitutas e representantes daquela massa de dados.

<u>Estatística Indutiva</u> - consiste em inferir propriedades de um Universo sôbre a base de uma amostra com resultados conhecidos. Implica, naturalmente, num raciocínio muito mais complexo, de extrema importância para o desenvolvimento de uma disciplina científica.

Muitos iniciantes nos estudos da Estatística imaginam-se, de antemão, completamente incapacitados de um bom acompanhamento por falta de base matemática. Puro engano. Sabemos hoje em dia, que os Cursos de Iniciação à Estatística devem evitar a Matemática. Não se trata de uma necessidade, mas de uma virtude real, não se negando, lògicamente, a validade do conhecimento matemático para uma melhor compreensão dos "porquê" da Teoria Estatística.

Não somos contrários ao ensino da Matemática dos que lidam com a Estatística. Somos favoráveis, sim, ao ensino dos Métodos Estatísticos sem aprofundamentos matemáticos, mormente para iniciantes; depois de ensinado o ABC do método, demonstrar matemàticamente o significado da aplicação desta ou daquela técnica estatística torna o aprendizado da Estatística mais racional.

3. <u>O uso e interpretação das estatísticas</u>

Geralmente, quando apresentamos uma citação estatística, somos levados, de pronto, a desacreditar em qualquer argumentação em contrário, destituída de base numérica.

"Estatística é capaz de provar qualquer coisa", o que implica consequentemente em querer dizer que a Estatística não prova coisa alguma.

Aquêle que aceita dados estatísticos indiscriminadamente, muitas vêzes se deixará enganar, sem necessidade ; também aquêle que rejeita de pronto qualquer informe estatístico, estará dando prova de ignorância.

Há, evidentemente, a necessidade de especiais cuidados no manejo e na interpretação da Estatística; a interpretação não é monopólio dos estatísticos, sendo natural que, possuindo um maior conhecimento das técnicas estatísticas, levem vantagens no tocante à apreciação, análise e interpretação dos dados estatísticos. O raciocínio claro é indispensável para interpretar estatísticas, requerendo uma disposição mental receptiva e crítica.

Raramente, ou nunca, os dados estatísticos falam por sí mesmos; a coisa mais importante acêrca da interpretação dos dados estatísticos é saber que êles devem ser interpretados; só hàbilmente coletados e criticamente interpretados podem ser extremamente úteis.

Infelizmente os maus emprêgos são tão numerosos quanto os usos válidos da Estatística. Ninguém-administrador, executivo, cientista ou pesquisador social - se deve deixar enganar pelas más estatísticas, embora os casos de emprêgo indevido da Estatística sejam tantos que possam / gerar a falsa impressão de que a Estatística é, raras vêzes ou nunca, digna de confiança.

A N E X O

Plano e execução de projetos de investigação quantitativa. Fase do trabalho estatístico.

1. Generalidades

A finalidade da pesquisa é descobrir respostas para questões, mediante a aplicação de métodos científicos.Tais métodos são desenvolvidos visando criar uma probabilidade, cada vez mais tendente para a unidade, de as informações / obtidas às questões apresentadas serem, além de seguras e imparciais, realmente representativas do mundo real.

Não é verdade, entretanto, que qualquer tentativa de realização de uma pesquisa dê resultados satisfatórios, embora os métodos científicos tenham, efetivamente, uma maior condição de apresentar resultados mais fidedignos,mais perto da verdade.

Aqui trataremos apenas do método estatístico visando à elaboração de projetos de investigação de caráter quantitativo.

É extremamente importante o conhecimento de como fazer pesquisa estatística. Atualmente, em nosso país, a ânsia pelo conhecimento das necessidades coletivas está levando à realização de trabalhos de pesquisas sem qualquer metodologia científica, o que desacredita os resultados atingidos, o mais das vêzes fortemente afastados da realidade.

Quem se inicia nas Ciências Sociais tem o dever de conhecer o método estatístico e as suas técnicas de pesqui

c) a necessidade dessas informações é acidental ou permanente ?

d) por que se deseja essas informações ?

e) para que ?

f) para quando ?

Se em consequência do exame dêsses ítens, ficar manifesta a necessidade do levantamento, procederemos ao respectivo planejamento, isto é, a elaboração do plano de ação que compreende tôdas as operações, desde a consideração inicial do problema até a interpretação dos resultados finais.

No Planejamento devemos considerar os seguintes pontos:

2.1. Definição do Universo - O universo a ser investigado deve ser definido precisamente, sob pena de comprometer os resultados de levantamento; torna-se necessário, pois, delimitarmos claramente, no tempo e no espaço, o âmbito do inquérito, definido, em têrmos precisos, o universo a ser trabalhado.

2.2. Exame das informações disponíveis - Ao planejar uma pesquisa devemos, como medida preliminar, reunir todo o material existente - mapas, relatórios, artigos, livros etc. - relativo a levantamentos semelhantes ou correlatos.

2.3. Tipo de levantamento - Três fatôres essenciais - tempo, custo e precisão - governam o tipo de levantamento que pode ser:

a) censitário (contagem completa)

b) amostragem (contagem parcial)

2.4. Prazo - Quando efetivamos um planejamento, é conveniente pormenorizar o prazo de cada fase da opetivá-lo com o mínimo custo.

A precisão de uma operação é aferida através de amostragem destinada a evidenciar a sua integralidade.

Decidido o tipo do levantamento a ser efetuado - censo ou amostragem - à luz das condições de prazo, custo e precisão, cabe fixar a periodicidade da indagação, no caso de a mesma não ser de caráter eventual ou acidental.

3. <u>Fases da execução</u>

3.1. <u>Coleta das informações</u> - Como, quando e onde obter as informações julgadas necessárias e suficientes ?

Há diversas maneiras de obtermos as informações:

a) por via postal;

b) por entrega pessoal

c) por entrevista direta.

O correio, entre nós, serve como veículo subsidiário da troca de entendimentos entre os órgãos interessados em pesquisas e os pesquisadores.

A utilização do correio, em face das suas / condições de funcionamento e da falta de educação da massa de informantes tem proporcionado sérias desvantagens: pequena percentagem de questionários devolvidos e elevada percentagem de respostas de qualidade inferior, entre outras.

A via postal, numa região em que os correios funcionam eficientemente, apresenta apreciáveis vantagens não só econômicas (menos tempo, menos custo), como técnicas (evitando o contacto direto entre as duas partes, eliminando a tendenciosidade de agentes mal instruidos) e sociais (possibilitando ao informante preencher o questionário em ocasião mais favorável).

Por entrega pessoal, os questionários são levados aos informantes por um portador não qualificado e, mediante aprazamento, recolhidos da mesma maneira.

A entrevista direta consiste no contacto pessoal do pesquisador com o informante e é, se exercida com a indispensável habilidade, o meio mais eficiente de obtermos informações.

Oferece as seguintes vantagens:

a) maior percentagem de questionários preenchidos;

b) melhor preenchimento, evitando verificações posteriores, quanto à fidedignidade das informações;

c) obtenção de úteis informações suplementares; e

d) possibilidade de esclarecimento conveniente do informante acêrca da verdadeira significação dos quesitos, servindo, ao mesmo tempo, para educá-lo quanto às finalidades e importância das pesquisas estatísticas.

Como desvantagens poderíamos citar:

a) maior tempo para a cobertura de uma área geográfica qualquer;

b) maior custo econômico, quer pela manutenção do pessoal de campo, quer pelas despesas de transporte;

c) perigo de tendenciosidade, tanto do pesqu[illegible] [illegible] mo do [illegible]

O êxito da entrevista direta depende, essencialmente, da <u>conduta do pesquisador</u> que a mantêm, a qual, em relação ao informante se resume em:

a) identificar-se, sempre que necessário;
b) expor-lhe os objetivos do inquérito, demonstrando a necessidade da sua cooperação;
c) assegurar a confidencialidade das informações;
d) colocá-lo à vontade, usando linguagem comum;
e) limitar-se às perguntas necessárias ou essenciais;
f) evitar discussões sôbre política, religião / ou qualquer outro assunto que possa suscetibilizá-lo;
g) deixar que êle preencha o questionário, prestando-lhe assistência, quando solicitada;
h) não fugir ao assunto principal;
i) evitar a maior perda possível de tempo.

Algumas informações podem ser obtidas através de registros permanentes, como é o caso dos nascimentos e óbitos, não atendendo, entretanto, às condições de integralidade - como é, no Brasil, o caso dos registros civis - impõe-se a realização de pesquisas suplementares, a fim de evitar tendenciosidades.

3.2. <u>Elaboração do Questionário</u>

A elaboração de um questionário - que é uma série de perguntas elaboradas para contestar ou para comprovar uma ou várias hipóteses ou os fatos objeto da investigação - é tarefa delicada mesmo para quem seja especializado na matéria ou tenha necessária experiência na técnica de observação estatística, havendo a considerar dois aspectos: o material e o técnico.

O aspecto material compreende o tamanho do questionário, a qualidade do papel, a côr do papel, o tipo de impressão, etc.

O aspecto técnico da feitura de um questionário exige exame das situações ligadas ao que se vai coletar, de quem vai informar, aonde e como se vai coletar, e a quem vai coletar.

No tocante <u>ao que se vai coletar</u>, são procedimentos de ordem prática:

I - incluir, apenas, os quesitos comprovadamente essenciais, dispostos, em sequência lógica e ordenada, dos ítens mais simples / aos mais complexos;

II - evitar questionários longos demais, a fim de não cansar o entrevistado;

III - evitar, sistemàticamente, os quesitos marginais, ou seja, aquêles que não servem nem à identificação do informante, nem ao esclarecimento de qualquer pormenor fundamental, nem à apuração;

IV - evitar quesitos cujas respostas possam propiciar inexatidões ou obriguem o informante a responder por indícios, suposições ou palpites;

V - não incluir quesitos cujas respostas possam ser obtidas diretamente, por outros meios;

VI - não incluir quesitos cujas respostas exijam cálculos matemáticos ou pesquisas demo radas;

VII - usar palavras e expressões familiares ao informante, através de questões concisas, de inequívoco entendimento, evitando-se redações longas;

VIII - evitar questões ambíguas ou gerais que dêm lugar a respostas indiretas, opinativas ou de múltipla escolha, salvo quando exigidas pela natureza da pesquisa; os quesitos, ao contrário, devem produzir a informação desejada;

IX - evitar quesitos que sugiram, êles próprios, uma resposta;

X - evitar quesitos que possam vir a ferir a susceptibilidade do informante, ou envolvam algum interêsse pessoal;

XI - incluir quesitos de contrôle ou de amarração, a fim de comprovar a validade das informações (outras vêzes a comprovação das respostas dadas a um questionário é feita aplicando-se o questionário uma segunda / vez, por intermédio de outro pesquisador diferente, as amostras tiradas ao acaso do mesmo universo dos informantes e comparando-se as respostas);

XII - evitar extensas notas explicativas; instruções sucintas devem definir as perguntas, contribuindo para a segurança e a unidade das respostas;

XIII - ter em vista o nível intelectual do informante;

XIV - evitar siglas ou abreviaturas, e o uso de unidades de medida diferentes das usadas normalmente pelo informante.

Em resumo o que desejamos é a simplicidade, a concisão, a compreensividade, a precisão, a menor importunação possível do informante, a segurança das respostas.

Na elaboração dos instrumentos de coleta convém ficar ressaltado, ainda, o seguinte:

a) o órgão responsável pela pesquisa;

b) a caracterização da época de coleta das informações e o período a que estas devem dizer respeito;

c) a confidencialidade das informações;

d) a necessidade de condicionar a ordenação dos quesitos ao plano de tabulação.

3.3. <u>Informantes</u>

Há necessidade de um trabalho de preparação / da massa de informantes, sendo muitas vêzes indispensável que o informante, ao receber a visita do pesquisador, já esteja a par do que se pretende.

Convém, pois, que o pesquisador prepare a comunidade, examinando as possíveis reações que ela oferecerá à indagação e prováveis tendenciosidades.

As tendenciosidades mais comuns do informante são derivadas das seguintes condições:

a) ignorância;

b) má fé;

c) temor de assunto de impôsto, requisição de produto ou convocação militar;

d) incapacidade de responder;

e) vaidade ou interêsse pessoal (posição so-

A habilidade do pesquisador, a preparação do informante e a precisão no planejamento podem reduzir a um mínimo as aludidas tendenciosidades.

3.4. <u>Local de coleta</u>

Vistos os meios usuais de coleta, apenas recomendamos que a coleta seja efetuada na fonte da informação, evitando sempre, o informante de segunda mão; que sejam investigadas, apenas, as unidades indicadas pelo órgão que executa a pesquisa.

3.5. <u>Pessoal</u>

O êxito de uma pesquisa depende, em grande parte, do pessoal que a executa no campo, junto às fontes.

O pessoal de campo compreende duas categorias funcionais: auxiliares e supervisores, aos primeiros cabendo conseguir as informações referidas no plano de pesquisa e aos outros coordenar, assistir e orientar os auxiliares de campo.

Pode ser, ainda, permanente e temporário. Em algumas instituições há equipes permanentes, de elementos efetivos; se isto apresenta desvantagem, por outro lado permite a formação e a especialização profissionais.

A formação do auxiliar de pesquisas constitui matéria delicada, devendo os seus cursos intensivos de preparação ter em vista os seguintes pontos essenciais:

a) elementos gerais das técnicas de pesquisa;

b) estudo específico da pesquisa a ser efetuada;

c) exame das instruções gerais e especiais /

f) examinar, cuidadosamente, todo material coletado.

Um bom auxiliar deve atender aos seguintes re

:

a) requisitos físicos, em que se incluem os cuidados pessoais, o estado de saúde, a ordem do material de coleta, etc.;

b) requisitos culturais atraindo a simpatia / do informante, como por exemplo: a maneira de conversar bem, a habilidade de expor o problema objeto da indagação e demonstrando o interêsse e a significação da mesma;

c) requisitos técnicos através dos quais inspira respeito ao informante, incluindo-se, aí, o pleno domínio da tarefa, o senso crítico indispensável à eliminação de tendenciosidade do informante, a capacidade acurada de observação, a persistência na obtenção de informações, a disposição de cooperar com o informante, a eliminação de idéias preconcebidas, e equanimidade no registro das informações, o cumprimento rigoroso das instruções recebidas e o apêlo ao supervisor quando necessária a sua cooperação, etc.;

d) requisitos morais através dos quais conquista a confiança do informante, compreendendo a honestidade no trato com os semelhantes, a dignidade da vida privada, a equidistância dos antagonismos locais, a de

Entretanto, o material coletado sofre duas verificações: uma, imediata, no campo, no momento da coleta, a qual compete ao pesquisador; e outra, mediata, de que se incumbe o supervisor, através de elementos especializados, procurando os espaços vazios, as respostas defeituosas ou outras quaisquer deficiências.

Quando consideramos necessário e possível, restituimos o questionário ao auxiliar de campo, para correção.

3.8. Apuração

A apuração pode ser mecânica ou manual: total (se abrange todos os questionários) ou parcial (se é realizada à base de amostragem); simples (quando se apuram os quesitos separadamente) ou cruzada (quando se apuram conjugadamente, dois ou mais quesitos).

Apurados os resultados, devem os mesmos ser tabulados ou apresentados gràficamente para serem interpretados e divulgados.

3.9. Análise dos resultados

Os dados finais de uma apuração, depois de devidamente tabulados, devem ser analisados.

Um dos aspectos mais importantes é o da avaliação da precisão do levantamento, seja êle censitário ou por amostragem.

A cada pesquisa deverá corresponder um relatório circunstanciado, abrangendo tôdas as etapas de trabalho, desde as preliminares até as finais.

O mais importante na fase da análise de uma investigação é ter presente que devemos nos limitar às conclusões pertinentes ao problema, tudo dependendo da competência, integridade e expe ncia do analista.

APOSTILA 2 - APRESENTAÇÃO TABULAR E GRÁFICA

I - APRESENTAÇÃO TABULAR

1. Noção Geral

Um dos métodos usados para a apresentação de dados estatísticos é aquêle que consegue expor os resultados sôbre determinado assunto num só local, sintèticamente, de tal modo que tenhamos uma visão mais globalizada do que vamos analisar. Denominamos êsse método de Apresentação Tabular.

A apresentação tabular dos dados estatísticos - se faz mediante tabelas (ou quadros), resultantes da disposição dos respectivos dados em linhas e colunas distribuídas de modo ordenado, segundo regras práticas adotadas pelos diversos sistemas estatísticos. No Brasil, essas regras foram fixadas pelo Conselho Nacional de Estatística.

2. Definições

Definimos tabela como sendo a "disposição escrita, que se obtém referindo-se uma coleção de dados numéricos a uma determinada ordem de classificação". Uma tabela pode ser simples ou de dupla entrada .

Tabela estatística simples é "aquêla composta - de uma coluna matriz, também chamada coluna indicadora, onde vão inscritos os valores ou modalidades da ordem de classificação e da coluna em que aparecem os valores que representam as ocorrências ou as intensidades do fenômeno em causa".

Tabela de dupla entrada é aquela "própria à apresentação das distribuições a dois atributos, qualitativos ou quantitativos, em que existem duas ordens de classificação : uma horizontal e outra em coluna indicadora ; nos cruzamentos formados pelas linhas com as colunas encontram-se a frequência dos indivíduos que apresentam conjuntamente as alternativas correspondentes à linha e à coluna que sôbre ela se cruzam". Exemplo : a tabulação simultânea de um conjunto de pessoas segundo seus pesos e suas estaturas.

As tabelas estatísticas se compõem de elementos essenciais e elementos complementares .

2.1. Elementos essenciais

Os elementos essenciais de uma tabela são : título, corpo, cabeçalho e coluna indicadora .

Título - é a indicação que procede a tabela e que contém a designação do fato observado, o local e a época em que foi registrado .

Corpo - é o conjunto de colunas e linhas que contém, respectivamente, em ordem vertical e horizontal, as informações sôbre o fato observado.

Cabeçalho- é a parte superior da tabela que especifica o conteúdo das colunas.

Coluna indicadora - é a parte da tabela que especifica o conteúdo das linhas .

2.2. Elementos complementares

Os elementos complementares de uma tabela estatística são : fonte, notas e chamadas, todos eles se situando, de preferência, no rodapé da tabela .

Fonte - É a indicação da entidade responsável pelo fornecimento dos dados ou pela sua elaboração..

Notas - São informações de natureza geral, destinadas a conceituar ou esclarecer o conteúdo das tabelas ou a indicar a metodologia adotada no levantamento ou na elaboração dos dados .

Chamadas - São informações de natureza específica sôbre determinada parte da tabela, destinada a conceituar ou esclarecer dados. As chamadas são indicadas no corpo da tabela em algarismos arábicos, entre parêntesis, à esquerda das casas e à direita da coluna indicadora. A numeração das chamadas na tabela será sucessiva, de cima para baixo, e da esquerda para a direita. A distribuição das chamadas no rodapé da tabela obedecerá à ordem de sua sucessão na tabela, separando-se uma das outras por um ponto.

Exemplo :

Cabeçalho

Título

POPULAÇÃO DO NORDESTE POR ESTADO, 1970

ESTADOS	POPULAÇÃO (1.000 habs)
Maranhão	3776
Piauí	1462
Ceará	3992
R.G. do Norte	1333
Paraíba	2322
Pernambuco	4908
Alagoas	1439
Sergipe	877
Bahia	7195
TOTAL	27.304

Coluna indicadora

Corpo

FONTE: Fundação I.B.G.E.

/.

3. Especificação dos dados e sinais convencionais

A especificação dos dados pode figurar tanto na coluna indicadora como o cabeçalho da tabela, ou ainda em ambos, quando se tratar de tabela de mais de uma entrada.

Acontece que, sempre, há a necessidade de acrescentarmos algumas denominações generalizadas, tais como :

Outros - quando o agrupamento tiver sido feito na fase de organização da tabela, por conveniência da apresentação .

Não declarado - quando o agrupamento tiver sido feito na fase da apuração dos dados, por falta ou insuficiência de informações dos declarantes.

Não especificado - quando o agrupamento não tiver sido previsto na fase da coleta de dados.

Já foi salientado acima que não devemos deixar em branco o cruzamento de uma linha com uma coluna ; devemos preencher com dados coletados ou, na ausência dêstes, com sinais convencionais, sendo os mais usados os seguintes :

- __ (traço), quando o dado fôr nulo, inexistir o fenômeno .
- ... (três pontos), quando não se dispuser da informação, embora ela possa ser quantificada .
- 0 (zero), quando o valor numérico fôr menor do que a metade da unidade ou fração decimal adotada para a expressão do dado .
- X (letra X), quando o dado fôr omitido a fim de evitar a individualização das informações .

/.

4. Apresentação das tabelas

Quando apresentamos uma tabela estatística, devemos levar em consideração os seguintes pontos :

i) tôda a tabela deve ter significação própria, de modo a prescindir, quando isolada, de consultas ao texto; êste critério deixa de ser aplicado se se tratar de dados numéricos de tal maneira integrados no texto que a ordem lógica do pensamento não seja interrompida por sua intercalação; as tabelas intercaladas em texto corrido devem estar situadas na altura em que são citadas pela primeira vez ;

ii) nenhuma casa deve ficar em branco, apresentando sempre um número ou sinal convencional ;

iii) evitar-se-á apresentação de tabelas em que a maior parte das casas indique a inexistência do fenômeno , a ausência de informações e dados sujeitos à retificação ;

iv) nenhuma tabela será disposta de maneira que a leitura exija colocação da página ou volume fora de sua posição normal ; quando isto não fôr possível deve-se apresentar a tabela de forma que a rotação da página, para leitura seja no sentido dos ponteiros do relógio ; quando a tabela não se enquadrar na largura da página e não fôr conveniente a sua apresentação em páginas confrontantes, os dados deverão ser apresentados em duas ou mais tabelas ;

v) as tabelas serão fechadas, no alto e em baixo, por traços horizontais, fortes, preferencialmente ;

vi) quando a tabela por excessiva altura tiver de ocupar mais de uma página não será delimitada na parte inferior e o "cabeçalho" será repetido na página seguinte, usando-se no alto do cabeçalho a palavra "continuação ", ou "conclusão", conforme o caso ;

vii) as tabelas não serão fechadas, à direita e à esquerda, por traços verticais ; será facultativo o emprêgo de traços verticais para separação das colunas no corpo da tabela, embora seja mais usual o seu uso ;

viii) nas tabelas que ocupam diversas páginas, as "chamadas" devem ser inseridas no rodapé das páginas em que estiverem indicadas ; a "fonte" e as "notas" figurarão no fim da tabela ;

ix) quando a tabela abrange páginas confrontantes, tôdas as linhas devem ter numeração seguidas nas primeiras e últimas colunas ; havendo muitas colunas, podem - as mesmas também ser numeradas ;

x) os conjuntos de tabelas devem ser precedidas de uma indicação dos sinais empregados e, ao final , ser acompanhados da relação completa das fontes e endereços ;

xi) a soma dos dados numéricos de uma linha ou coluna será indicada destacadamente pela palavra "total" , exceto quando se referir a uma área geográfica, caso em - que receberá o nome do conjunto da mesma ;

xii) é facultativo que o total preceda ou suceda as parcelas ; em qualquer dos casos, o modo de apresentação deve ser uniforme; a soma de totais parciais será indicada pela expressão " total geral ";

xiii) quando uma tabela tiver muitas colunas e poucas linhas, deve-se desmembrar a tabela em secções, dispostas uma abaixo das outras e separadas por traço horizontal duplo ; quando a tabela tiver muitas linhas e poucas colunas, poderá ser desmembrada em duas ou mais partes, lado a lado, separadas por traço vertical duplo ;

xiv) indicar-se-á, sempre que a natureza do fenômeno estudado o exigir, a data de referência dos dados ;

xv) quando os dados se referirem a uma série de anos civís consecutivos, indicam-se três algarísmos, no caso de variar o século, e dois em caso contrário, separados por um hifen ; 1899 - 960 ; 1960 - 67 ;

xvi) quando os dados se referirem a uma série de anos civis consecutivos, indicam-se o primeiro e o último, ambos em algarismos completos, separados por hífen ; ex : 1950 - 1967 ;

xvii) quando os dados se referirem a um período - de doze meses diferentes do ano civil, indicam-se o pri - meiro e a parte variável do segundo, separados por uma barra inclinada ; ex . 1966/67

xviii) a indicação dos meses poderá ser abreviada pelas suas três primeiras letras ;

xix) quando os dados se referirem a uma área - geográfica, aplicar-seão os seguintes critérios :

- Ordem geográfica das unidades da federação e respectivos grupamentos em regiões fisiográficas, a serem indicados pelo Conselho Nacional de Geografia ;

a - ordem alfabética para a indicação dos demais casos, devendo as divisões territoriais serem agrupadas segundo as convenções em vigor: países, segundo - os continentes ; municípios e cidades, segundo as unidades da federação ; distritos e vilas, segundo os municípios.

xx) Poderá ser adotado outro critério de especificação, que não a ordem alfabética, se a natureza do fenômeno o aconselhar .

II - Distribuições quantitativas e não quantitativas

1. Generalidades

O método estatístico, tal como foi definido anteriormente, não lida apenas com dados quantitativos. Poderíamos com efeito, saber, em determinada localidade, o número de pessoas brancas, pretas e pardas ; teríamos, en contínua de valores. Vejamos o que entendemos por variável discreta.

Variável discreta é aquela que pode assumir valores positivos inteiros, inclusive zero. Mais corretamente, variável discreta, também denominada descontínua, é aquela cuja menor diferença entre dois valores é finita - (neste caso 1).

Tomando como exemplo uma jogada de dois dados verifica-se que a soma de pontos seria uma variável discreta, ou seja, a soma dos pontos seria 2 ou 3, ou 4, ou 5 ou no máximo, 12 pontos, que é a soma máxima obtida pelos - dois dados. As principais séries homogradas são as séries temporais, as séries geográficas e as séries especificativas. Vejamos cada uma delas, isoladamente :

i) Séries temporais, também chamadas evolutivas, cronológicas, históricas, ou simplesmente, marchas. São aquelas em que é variável o tempo, permanecendo fixos o local e o tempo .

Exemplo 1

População do Nordeste, do Brasil 1965/70

Anos	população (1.000 habs)
1965	24.531
1966	25.058
1967	25.601
1968	26.154
1969	26.723
1970	27.304

Fonte : Instituto Brasileiro de Estatística

Exemplo 2

Renda per capita de alguns países selecionados, 1967 .

País	Renda per capita (US$)
EEUU.............	3.303
Canadá	2.087
Venezuela	761
Argentina	519
México	478
Chile	465
Brasil	350
Guatemala	264
El Salvador	245

Fonte : Year book of National Accounts Statistics, 1968 - ONU

iii) Séries especificativas, também denominadas categóricas, são aquelas em que o fenômeno é variável , ficando imutáveis o tempo e o local.

Exemplo 1

Produção de minérios no Brasil, 1968

Especificação	Produção (1.000 ton)
Amianto	34
Cromo	17
Dolonita	353
Grafita	22
Magnesita	138
Tungstênio	152

Fonte : Fundação IBGE - Anuário Estatístico contínua de valores. Vejamos o que entendemos por variável discreta.

Variável discreta é aquela que pode assumir valores positivos inteiros, inclusive zero. Mais corretamente, variável discreta, também denominada descontínua, é aquela cuja menor diferença entre dois valores é finita - (neste caso 1).

Tomando como exemplo uma jogada de dois dados verifica-se que a soma de pontos seria uma variável discreta, ou seja, a soma dos pontos seria 2 ou 3, ou 4, ou 5 ou no máximo, 12 pontos, que é a soma máxima obtida pelos dois dados. As principais séries homogradas são as séries temporais, as séries geográficas e as séries especificativas. Vejamos cada uma delas, isoladamente :

i) Séries temporais, também chamadas evolutivas, cronológicas, históricas, ou simplesmente, marchas. São aquelas em que é variável o tempo, permanecendo fixos o local e o tempo .

Exemplo 1

População do Nordeste, do Brasil 1965/70

Anos	população (1.000 habs)
1965	24.531
1966	25.058
1967	25.601
1968	26.154
1969	26.723
1970	27.304

Fonte : Instituto Brasileiro de Estatística

Exemplo 2

Depósitos do sistema 34/18 no Banco do Nordeste do Brasil, a preços de 1968, 1962/1968.

Anos	cr$ (1.000.000)
1962	60.669
1963	59.735
1964	119.855
1965	317.836
1966	352.431
1967	435.565
1968	456.681

Fonte : BNH/Sudene

ii) Séries geográficas, igualmente chamadas territoriais, espaciais ou de localização, são aquelas em que é variável o local, fixos o tempo e o fenômeno.

Exemplo 1

População do Nordeste, por Estado, 1970

Estados	População (1.000 hab.)
Maranhão	3.776
Piauí	1.462
Ceará	3.992
R.G. do Norte ..	1.333
Paraíba	2.322
Pernambuco	4.908
Alagôas	1.439
Sergipe	877
Bahia	7.195
Total	27.304

Fonte : Instituto Brasileiro de Estatística

Exemplo 2

Renda per capita de alguns países selecionados, 1967 .

País	Renda per capita (US$)
EEUU............	3.303
Canadá	2.087
Venezuela	761
Argentina	519
México	478
Chile	465
Brasil	350
Guatemala	264
El Salvador	245

Fonte : Year book of National Accounts Statistics, 1968 - ONU

iii) Séries especificativas, também denominadas categóricas, são aquelas em que o fenômeno é variável , ficando imutáveis o tempo e o local.

Exemplo 1

Produção de minérios no Brasil, 1968

Especificação	Produção (1.000 ton)
Amianto	34
Cromo	17
Dolonita	353
Grafita	22
Magnesita	138
Tungstênio	152

Fonte : Fundação IBGE - Anuário Estatístico

Exemplo 2

Recursos Orçamentários transferidos pela União à Sudam, por função, em 1968

Função	(cr$ 1.000)
Administração	13.571
Agropecuária	2.200
Colonização e Reforma Agrária	1.600
Comunicações	7.500
Defesa e Segurança...	897
Educação	3.415
Energia	10.250
Saúde e Saneamento...	4.100
Transportes	28.935
Recursos Naturais....	2.000
Total	74.468

Fonte : Ministério da Fazenda

Frequentemente são usadas séries estatísticas conjugadas, onde são cruzadas dois ou mais tipos de séries; podemos ter as conjugações geográfico - temporal, geográfico especificativo - temporal, especificativo - geográfico - temporal, etc .... Vejamos cada uma delas, individualmente.

a) Série geográfico - temporal

Agências do Banco do Brasil
instaladas no Nordeste -
1962/1966

Estados	1962	1966
Maranhão...............	5	13
Piauí...................	9	13
Ceará	15	19
Rio Grande do Norte....	6	7
Paraíba	8	14
Pernambuco	11	18
Alagôas	6	8
Sergipe	6	7
Bahia	29	42

Fonte : Anuário do Banco do Brasil

b) Série Geográfico - especificativa

Produção das principais lavouras
do Nordeste, por Estado, 1970

E s t a d o s	Produção (1000 T)				
	Arroz com casca	Milho	Mandioca	Açucar	Algodão com caroço
Maranhão	739	217	1.743	594	24
Piauí	108	109	737	374	40
Ceará	100	427	1.907	2.319	341
Rio Grande do Norte .	7	85	556	676	113
Paraíba	37	196	623	2.116	134
Pernambuco	9	272	1.597	10.706	106
Alagôas	20	62	505	5.869	23
Sergipe	16	41	819	901	11
Bahia	66	290	3.898	3.933	81

Fonte : Fundação IBGE e Fundação Getúlio Vargas .

c) Série especificativa - temporal

Evolução do Corpo Docente do Sistema Educacional Brasileiro, 1960, 1965, 1968

Especificação	Anos		
	1960	1965	1968
Ensino Primário	225.569	351.466	423.145
Ensino Médio	60.944	90.465	...
Ensino Superior	18.286	28.768	37.770

Fonte : Fundação IBGE

d) Série especificativa - geográfica - temporal

Principais derivados do petróleo, produzidos na Guanabara e São Paulo, 1967/68

Especificação	Guanabara		São Paulo	
	1967	1968	1967	1968
Gasolina "A"	309	353	2.607	2.440
Gasolina "B"	-	-	45	77
Óleo Combustível.....	160	143	2.874	3.006
Óleo diesel	-	-	1.801	1.691
Querozene ..	-	-	283	307

Fonte : Conselho Nacional de Petróleo

Poderíamos continuar a pesquisar e faríamos várias outras tabelas. O problema consiste em encontrar o melhor meio de eleborá-las, tornando-as mais inteligíveis possíveis. No capítulo seguinte trataremos da construção e confecção de tabelas .

1.2. Séries heterógradas

Como série heterógrada entendemos aquela cujo fenômeno sofre gradações ou subdivisões, permanecendo fixos o local e o tempo. São séries heterógradas as chamadas distribuições de frequências .

Distribuições de frequências, também chamadas - distribuições por frequência ou derivadas, são séries heterógradas que têm fixos o fenômeno, o tempo e o local, sendo o fenômeno apresentado através de gradações da variável.

Exemplo

Estrutura etária da população do Recife

1960

Idades (anos)	%
0 - 9	24
10 - 19	21
20 - 29	22
30 - 39	14
40 - 49	9
50 - 59	5
60 - 69	3
70 - 79	1
80 - 89	1
90 - 100	0

As gradações do fenômeno estudado são obtidos através de classes de frequências cujo método de obtenção será ensinado mais adiante .

III - Apresentação gráfica

1. Preliminares

Para o problema de interpretação de dados numéricos, a organização de tabelas constitui um grande passo - no sentido de facilitar a análise dos números ; mas, logo - depois, sentimos a necessidade de nova construção que nos - possa fornecer uma compreensão rápida, clara e fácil dos informes estatísticos .

São palavras de William Playfar, o primeiro a representar, gràficamente, dados econômicos em 1786 : " Geralmente se reconhece que fui bem sucedido quando propus a nova e útil maneira de expor dados numéricos, pela qual podem fixar-se de modo duradouro, em cinco minutos, informações que levariam dias a gravar-se na memória por meio de tabelas".

Atualmente são múltiplas as funções dos gráficos, permanecendo, porém, sua finalidade principal : a de apresentar dados numéricos em forma visual.

O gráfico retrata o passado, o presente e o futuro provável. Por isso, aplicamos nas pesquisas e comparações históricas, nas análises de situações atuais e nas previsões do futuro. Presta-se o processo gráfico ao registro de informações para fins de referência, permitindo, além do mais, que se deduzam conclusões lógicas baseadas nos dados representados.

O gráfico constitui, atualmente, um instrumento essencial para o economista, o administrador, o homem de ne gócios, o educador, o biólogo, o médico, o psicólogo, o engenheiro, o sociólogo, bem como para os profissionais de quase todos os demais ramos de atividade.

2. Classificação dos gráficos

Os gráficos podem ser classificados, de acôrdo com o método empregado para fazer a comparação, em :

i) Gráficos lineares
ii) Gráficos de barras
iii) Setogramas
iv) Outros tipos

Vejamos cada um dêles, individualmente .

i) Gráficos lineares

O diagrama linear, provàvelmente, é o gráfico empregado com maior frequência. Representa alterações quantitativas sob a forma de uma linha. As flutuações da linha proporcionam rápida percepção visual da tendência dos dados ou da sua mutação em certo período de tempo.

Geralmente, representamos sob a forma de diagrama linear os dados dispostos por período de tempo (as séries cronológicas) ou por magnitude das ocorrências (distribuições de frequência).

Assumem também a forma linear os gráficos de correlação (a serem vistos no capítulo sôbre correlação) entre duas séries de dados .

De acôrdo com o exposto, as várias modalidades de gráficos lineares representam :

a) as séries cronológicas ;
b) as distribuições de frequência ;
c) as correlações

Devemos preferir o diagrama linear a quaisquer outras modalidades de gráficos, quando existe um número apreciável de valores e quando os dados são contínuos, não havendo solução de continuidade na série de valores. Na série <u>discreta</u> <u>ou</u> <u>descontínua</u>, sòmente são possíveis limitadas gradações; numa série que apresente, por exemplo, em classes, o número de estudantes, nenhum valor fracionário pode ser admitido.

Quando traçamos num mesmo gráfico, diversas linhas, recorremos a uma <u>legenda</u> ou etiquetamos as próprias linhas. A <u>legenda</u> fica encaixada num espaço em branco, a regular distância das curvas e dos bordos do diagrama.

Quando incluimos, num só gráfico, diversas linhas devemos recorrer a traçados ou côres diferentes ."

Exemplo :

Gastos públicos com educação no Brasil,
1960 / 1967

ANOS	VALOR DE 1968 (cr$ 1.000.000
1960	1.229,7
1961	1.370,6
1962	1.574,7
1963	1.255,1
1964	1.323,2
1965	2.109,1
1966	2.193,7
1967	2.275,0

Fonte : IPEA

/.

Suponhamos a seguinte tabela :

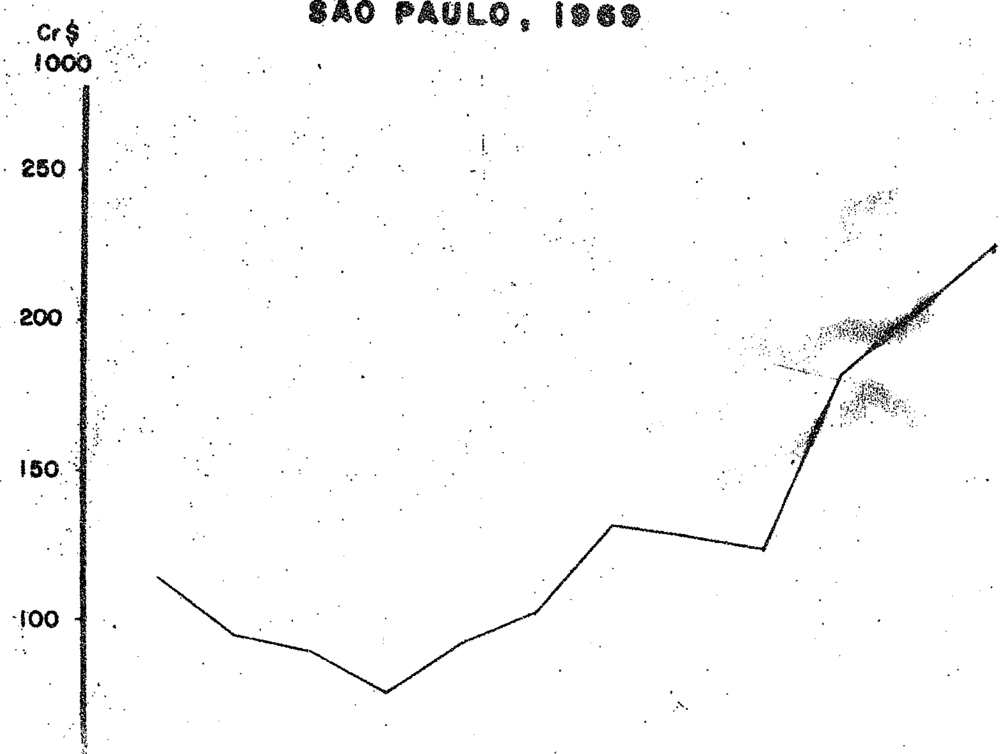
Vendas mensais da Indūstria X,
São Paulo, 1969

Mêses	Vendas (cr$ 1.000)
Janeiro	114,0
Fevereiro	98,3
Março	90,2
Abril	78,5
Maio	94,7
Junho	102,8
Julho	137,4
Agôsto	135,2
Setembro	129,7
Outubro..........	178,9
Novembro	202,3
Dezembro	250,0

Fonte : Indūstria X

Difīcil de se verificar olhando a tabela, fācil ē de comprovar as oscilações de venda, durante o ano de 1969 , da Indūstria X, por um grāfico linear. Senão vejamos :

VENDAS MENSAIS DA INDÚSTRIA X,
SÃO PAULO, 1969



O histograma e o polígono de frequência, os mais importantes dentre os gráficos lineares, bem como a curva de frequências acumuladas e as chamadas curvas de Lorenz, serão estudadas no capítulo seguinte, sôbre distribuição de frequências.

II) Gráficos de barras

O gráfico de barras confronta quantidades, por meio de barras cuja largura é constante, enquanto a altura, varia em função da magnitude dos valores. Os retângulos podem apresentar-se horizontal ou verticalmente, devendo preferir - se a última posição quando está envolvido o elemento tempo.

Os gráficos de barras podem ser classificados, - com referência à maneira como expõem as informações, em :

a) gráficos representativos de valores absolu - tos, isto é, das unidades originais dos dados, como toneladas, cruzeiros, estudantes, etc.

b) gráficos representativos de percentagens .

O gráfico de barras é a forma mais eficiente de representação para um número limitado de valores ou para comparar quantidades discriminadas por lugares, tipos ou espécies.

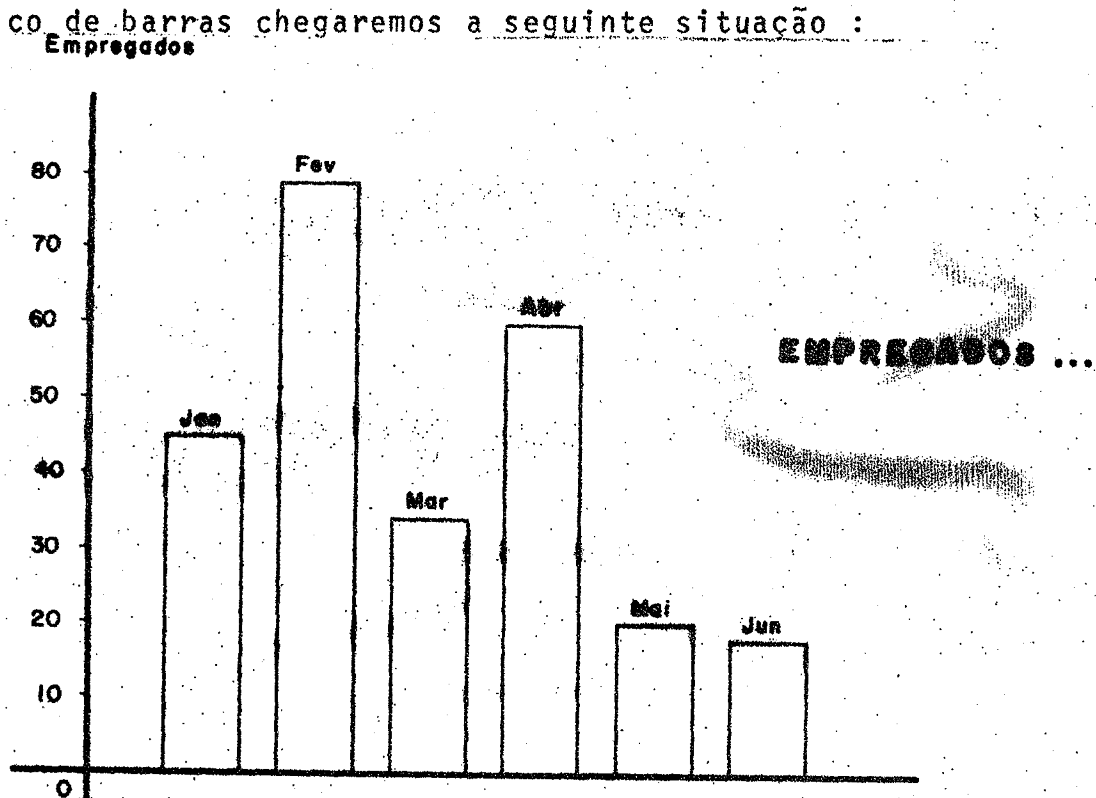
Tomemos como exemplo, o número de empregados atendidos no Departamento de Pessoal de uma determinada indústria.

Empregados atendidos no Departamento de Pessoal da Indústria X, da cidade Y, no primeiro semestre de 196......

Meses	Quantidade
Janeiro	45
Fevereiro	79
Março	34
Abril	60
Maio	20
Junho	18

Fonte : Departamento de Pessoal da Indústria X

Representando a série acima através de um gráfico de barras chegaremos a seguinte situação :



iii) Setogramas

Outro tipo de gráfico é o chamado gráfico de setores ou setograma. O setograma é um círculo cuja área se divide em segmentos representativos das partes proporcionais de um todo. O setograma constitui um tipo de gráfico de componentes e presta-se para confrontar as partes integrantes de um total.

Para apresentar dados por meio de setograma, empregamos valores relativos e não absolutos, devendo, por isso, os elementos numéricos serem convertidos, prèviamente, em gráus. Em seguida :

a) Traçamos um círculo a lápis ou a tinta, com auxílio de compasso ;

b) Com o transferidor, marcamos o ponto central do semicírculo (90º) ;

c) Atribuindo à circunferência o valor 360º, assinalamos a partir do ponto central referido acima, o gráu representado pelo primeiro dado da tabela. Os demais segmentos - são a seguir determinados, de forma ordinal;

d) Em seguida inserimos, imediatamente abaixo do círculo, o título, a fonte e as notas elucidativas, tal como já ficou indicado em relação às outras modalidades de gráfico.

e) Identificamos os vários setores de duas maneiras : por meio de "janelas" abertas em cada um dos setores, contendo o nome e, caso necessário, o respectivo montante ou percentagem ou com o auxílio de uma legenda, aposta em posição adequada abaixo do gráfico .

Como ilustração, poderemos tomar a tabela abaixo :

População econômicamente ativa do Brasil, por ramo de atividade - 1975 (estimativa)

Ramo de Atividade	População (1.000 hbs.)
Agricultura	19.183
Indústria	4.820
Serviços	16.857
Total	40.860

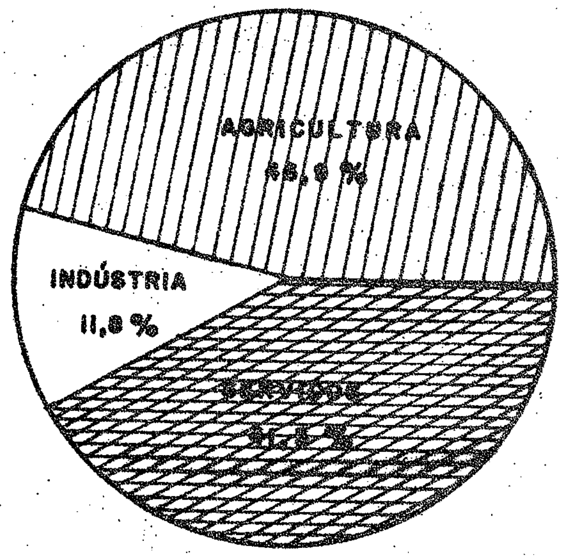
Fonte : IPEA

Transformamos os dados da tabela em grãus, tomando o total como 360º; acharemos os seguintes valores :

Ramo de Atividade	Grãus
Agricultura	169
Indústria	42
Serviços	149
Total	360

Representando agora setograma, teremos :

POPULAÇÃO...



As grandezas podem ser confrontadas, também, pelo volume de sólidos, como cubos, esferas e outras figuras de três dimensões. Essa comparação, porém, é mais difícil e imperfeita do que a assegurada pelos gráficos de barras e de áreas. Como os volumes das formas geométricas é que se confrontam, devem os mesmos guardar a mesma relação existente entre - os valores originais.

Os gráficos a três dimensões podem ser apresentados sob a forma de sólidos geométricos ou sob aspectos pictóricos; os mais fáceis de construir são os que se servem de figuras geométricas regulares, porque o volume destas se determina por meio de fórmulas ; para se construir um gráfico de volumes, desenhamos em perspectiva a figura geométrica adequada, cujo volume a calculamos por meio da fórmula respectiva.

Entretanto a forma mais comum na representação gráfica em volumes é a forma pictórica; <u>o pictograma de volumes</u> emprega-se frequentemente embora seja bastante compreensível o engano que podemos cometer na interpretação de tais gráficos, por causa da dificuldade de se estimar os volumes das figuras utilizadas .

iv) Outros tipos de gráficos

Existem, ainda, vários outros tipos de gráficos como, por exemplo :

a) Gráficos logarítmicos - são aquêles usados para estudar as variações em proporções, ou relativas, em vez das flutuações absolutas dos dados. Por exemplo : se pretende comparar, gràficamente, as vendas comerciais em uma praça pequena e aquelas efetuadas em uma praça maior, o gráfico resultante será provàvelmente impreciso, se traçado à base de um quadriculado aritmético. Se ambas tiveram percentualmente um aumento de 10% em suas vendas, em valores absolutos diferem completamente, pois que o volume de venda na praça maior deverá ser maior do que o volume de vendas na praça menor ; empregada, porém, uma escala logarítma, as duas curvas elevar-se-ão à mesma distância, porque, na referida escala, distâncias iguais representam variações iguais em proporções .

b) Gráficos de organização - são aquêles que convertem uma complexa organização numa simples impressão visual, indicando a hierarquia, o movimento ou a série de operações necessárias ao seu funcionamento. Classificam-se em dois grandes tipos : o primeiro, mais comumente conhecido como gráfico de organização ou organograma, representa as várias dependências ou diversos órgãos de uma entidade, em geral por uma série de linhas destinadas a indicar a subordinação e a responsabilidade de cada um . O segundo tipo, designado como gráfico de rotina, harmonograma ou fluxograma, é a representação gráfica da marcha de um determinado processo.

3. Regras Práticas para Execução de um Gráfico

Podemos, resumidamente, indicar as seguintes regras :

a) o título deve responder às classicas perguntas: "que", "onde" ? e "quando"?

b) a orientação geral deve ser da esquerda para a direita e de baixo para cima ;

c) as quantidades devem ser representadas por grandezas lineares, uma vez que as áreas e volumes se prestam a interpretações errôneas ;

d) sempre que possível, a escala vertical há de ser escolhida de modo a aparecer a linha 0 (zero) ; no caso de não poder aparecer a linha 0 (zero) na escala vertical, esta linha deve ser traçada em seguida de uma interrupção ;

e) a linha 0 (zero) será diferente (na grossura, em geral) das outras coordenadas ;

f) quando o gráfico representa percentagem, é aconselhável fazer sobressair a linha 100% ou outra que se utilize como base de comparação ; em tais casos não deve ser indicada a linha 0 (zero) ;

g) se o período representado não é uma unidade de tempo completa convém não figurar a escala do lado direito , para significar que o diagrama não representa o final detempo ;

h) só devem ser incluídas, no desenho, as coordenadas indispensáveis para guiar a leitura, de vez que um tracejado muito cerrado dificulta o exame do gráfico ;

i) convém que as linhas de um diagrama sejam - traçadas bem distintamente, usando-se côr ou tipo de linha diferente, para que sejam diferenciadas uma das outras ;

j) no caso de curvas representativas de uma série de observações, é conveniente indicar, claramente, no diagrama todos os pontos que representam as observações ;

l) a escala horizontal deve ser lida da esquerda para a direita, e a vertical de baixo para cima ;

m) os títulos e marcações do gráfico serão expostos de maneira que sejam fàcilmente legíveis, partindo da margem horizontal inferior ou da margem esquerda ;

n) quando a escala fôr logarítmica, cada uma das linhas principais do gráfico deve representar uma potência de 10 só a escala logarítmica ;

o) é aconselhável incluir, no rodapé do gráfico, os dados numéricos originais, em tabelas de tamanho reduzido.

FAG/drc

Apostila 3 - Distribuição de frequência

1. Preliminares

Na Estatística trabalhamos, habitualmente, com grande número de dados, resultados de medições realizadas.

Assim, é impossível examiná-los, mesmo que arrolados em ordem crescente ou decrescente. Daí os estatísticos condensarem tais dados em tabelas de fácil manejo, agrupando-os convenientemente em classes de valores ; os dados são assim apresentados em tabelas de frequências, onde está assinalado o número de casos verificados entre os limites de cada classe .

Vejamos como isto ocorre na prática. Suponhamos que 50 estudantes tenham sido submetidos a um teste de conhecimentos, tendo obtido as seguintes notas :

24	12	14	32	70
66	52	19	35	84
26	90	92	38	65
67	95	34	26	44
72	63	59	84	91
45	47	36	82	74
27	13	8	57	60
7	52	49	69	5
17	60	38	42	100
0	57	32	48	70

A atenção é logo voltada para os valores extremos destas notas ; observamos que os valores extremos são 0 (zero) e 100 (cem) . Denominamos intervalo total a distância entre o resultado maior e o resultado menor ; o resultado maior das notas acima é 100 (cem) e o menor 0 (zero), de modo que o intervalo é igual a 100 (100 - 0) .

Assim, It = 100 - 0   100

Calculado o <u>intervalo total</u>, estabelecemos o número e o tamanho dos grupamentos a serem utilizados na classificação. Empregamos geralmente intervalos com 3,5 ou 10 unidades pela relativa facilidade de trabalho dos cálculos subsequentes. Uma boa regra consiste em selecionar, por tentativa, agrupamentos que produzem de 5 (cinco) a 15 (quinze) categorias. Menos de 5 categorias poderia dar uma concentração muito grande, impossibilitando uma avaliação mais completa de como se encontra estruturada a distribuição .

Mais de 15 categorias, poderíamos ter exatamente o contrário : uma excessiva dispersão dos dados. Há, realmente, casos que podemos construir uma tabela de frequência - com mais de 15 categorias. Por exemplo, se estivéssemos trabalhando com a população brasileira (universo bastante elevado) poderíamos decompor essa população em mais de 15 categorias e não teríamos uma dispersão acentuada face a existência de uma frequência bastante significativa em cada uma das classes pré-estabelecidas.

No exemplo presente, dividindo o intervalo total (100) por 10 obtém-se intervalo de classe igual a 10. Assim, poder-se-á estabelecer as seguintes classes de notas :

0 - 9
10 - 19
20 - 29
30 - 39
40 - 49
50 - 59
60 - 69
70 - 79
80 - 89
90 - 100

Adotadas essas classes de valores e realizada a apuração dos dados do Universo composto dos 50 estudantes, podemos construir a seguinte distribuição de frequências :

2. Limites de classes

Estas classes têm os seus intervalos que são chamados intervalos de classes, representados por "i": as classes têm limites inferiores e limites superiores, e o limite inferior da primeira classe é também chamado limite inferior da distribuição como também é denominado limite superior da distribuição o limite suprior da última classe.

As classes, no exemplo dado, podem ser escritas de três maneiras distintas, tôdas elas com um mesmo significado. Ei-las :

0	-	9	0	-	10	0	-	9,9
10	-	19	10	-	20	10	-	19,9
20	-	29	20	-	30	20	-	29,9
30	-	39	30	-	40	30	-	39,9
40	-	49	40	-	50	40	-	49,9
50	-	59	50	-	60	50	-	59,9
60	-	69	60	-	70	60	-	69,9
70	-	79	70	-	80	70	-	79,9
80	-	89	80	-	90	80	-	89,9
90	-	100	90	-	100	90	-	100,0

As três distribuições estão perfeitamente corretas sendo a primeira a mais frequentemente utilizada.

Enquanto a segunda poderia dificultar a apuração, face os limites superiores de certas classes serem idênticos aos limites inferiores de outras. Pode parecer tornar confusa, para aquêles menos experientes, a maneira como estão expostas as classes de valores desta distribuição ; entretanto, se lermos "de zero até 10 excluso"; " de 10 até 20 excluso "; " de 20 até 30 excluso".... e assim por diante, estará solucionada a dificuldade.

A terceira distribuição não é muito aceita face a problemas de ordem estética.

Um valor igual a 9,993, então, seria incluído na primeira classe (de 0 - 9) pois [illegible] subentendido que limite superior engloba todos os demais valores decimais de 9 até o valor 10, limite inferior da classe seguinte ; assim - sendo, na classe de 0 - 9 estão inseridos todos os valores - que vão desde ZERO até 9,99999 ... excetuando-se o valor 10 que já estaria na segunda classe. Isto está bem demonstrado- na terceira maneira, quando temos as classes de 0 - 9,9 ; - 10 - 19,9 e assim por diante, revelando que os valores situa dos entre 0 e 10, exceção dêste último, estão incluso na pri- meira classe (0 - 9,9) .

Outros autores, no intúito de poupar tempo, es crevem os mesmos intervalos dêste modo :

0 -
10 -
20 -
30 - etc.

Nêste caso, não são fixados os limites superio - res das classes, ficando subentendido que tal notação significa " de zero e mais sem incluir 10", " de 10 e mais sem incluir - 20", etc ; o limite inferior é fixado e supomos que a classe inclua todos os valores até o limite inferior da classe seguin- te. Este modo de escrever, entretanto, dificulta, por vêzes, a interpretação dos dados e, embora útil para poupar tempo, não é de uso conveniente.

Outra parte condenada é a construção de tabelas de frequências em que a primeira classe, a última ou ambas são dispostas sem determinação dos seus limites, reduzindo a utili- zação dos dados ; na tabela 2 damos um exemplo .

Tabela 2

Corpo Técnico da Faculdade X ....
segundo anos de serviços, em 19 ....

X (anos)	f
- 2	3
2 - 5	7
5 - 10	9
10 - 20	[illegible]

A tabela acima é, por muitas razões, exemplo de como não se devem construir tabelas de frequência com classes de limites imprecisos e classes de intervalos desiguais.

Sendo necessário, por qualquer razão, deixar indefinidos os limites das classes do começo ou do fim de uma tabela, aumentaremos de muito o valor dela se alguns dados adicionais forem fornecidos a respeito dos valores incluídos ; na tabela 2, por exemplo, seria de tôda a conveniência um asterisco colocado junto à frequência 21, com uma nota ao pé da tabela esclarecendo que " a média dos anos de serviços dos técnicos incluidos nesta classe é de 24,5 anos", ou coisa semelhante.

3. Intervalo de Classe

Define-se, geralmente, intervalo de classe como a diferença entre os limites superior e inferior de uma classe. Entretanto, se considerarmos as três maneiras de escrever uma mesma classe :

0 - 9   0 - 10 e 0 - 9,9

podemos ser levado a afirmar, se não tivermos o devido cuidado em interpretar os respectivos limites, que existem três intervalos de classe nas três maneiras expostas atrás.

Entendemos por intervalo de classe a diferença entre o limite inferior de uma classe e o limite inferior da classe subsequente . Aí, então, de qualquer maneira que forem expostas as classes de uma distribuição, serão iguais os seus intervalos de classes.

Na tabela 1 o intervalo de classes é 10, pois 10 é a diferença entre os limites inferiores ou superiores das diversas classes sucessivas ou entre os respectivos pontos médios.

O intervalo de classe pode também ser definido como a distância entre dois pontos médios de duas classes imediatas.

A tabela acima é, por muitas razões, exemplo de como não se devem construir tabelas de frequência com classes de limites imprecisos e classes de intervalos desiguais.

Sendo necessário, por qualquer razão, deixar indefinidos os limites das classes do começo ou do fim de uma tabela, aumentaremos de muito o valor dela se alguns dados adicionais forem fornecidos a respeito dos valores incluídos ; na tabela 2, por exemplo, seria de tôda a conveniência um asterísco colocado junto à frequência 21, com uma nota ao pé da tabela esclarecendo que " a média dos anos de serviços dos técnicos incluidos nesta classe é de 24,5 anos", ou coisa semelhante.

3. Intervalo de Classe

Define-se, geralmente, intervalo de classe como a diferença entre os limites superior e inferior de uma classe. Entretanto, se considerarmos as três maneiras de escrever uma mesma classe :

0 - 9   0 - 10 e 0 - 9,9

podemos ser levado a afirmar, se não tivermos o devido cuidado em interpretar os respectivos limites, que existem três intervalos de classe nas três maneiras expostas atrás.

Entendemos por intervalo de classe a diferença entre o limite inferior de uma classe e o limite inferior da classe subsequente . Aí, então, de qualquer maneira que forem expostas as classes de uma distribuição, serão iguais os seus intervalos de classes.

Na tabela 1 o intervalo de classes é 10, pois 10 é a diferença entre os limites inferiores ou superiores das diversas classes sucessivas ou entre os respectivos pontos médios.

O intervalo de classe pode também ser definido como a distância entre dois pontos médios de duas classes imediatas.

Via de regra, ao construirmos uma tabela de frequência, convém que todas as classes tenham o mesmo intervalo; entretanto, em vários casos é aconselhável uma exceção à regra geral, admitindo-se o uso de intervalos desiguais, mas, a menos que existam boas razões em contrário, a regra dos intervalos uniformes deve ser obedecida invariàvelmente na feitura das tabelas .

Os intervalos de classe são também chamados de <u>amplitude de classe</u>. São designados pela notação "i" (delta)

4. <u>Ponto Médio de um Intervalo</u>

Em uma distribuição de frequência, consideramos que os resultados agrupados num determinado intervalo se distribuem igualmente por todo êsse intervalo. A hipótese é válida quer seja de 3,5 10 ou 20 unidades o intervalo de classe. Se quisermos representar todos os resultados de determinado intervalo por um valor único, o <u>ponto médio</u> do intervalo será a escolha lógica .

Mesmo que todos tivessem um único valor, quando grupados em classes de frequências, perdem suas característics individuais para se <u>equidistribuirem</u> por todo o intervalo de classe.

Ora, estando a frequência distribuída igualmente por todo o intervalo de classe, podemos escolher um ponto central que seja equidistante dos extremos de classe e que representa tôda a classe ; êste ponto central é denominado <u>ponto médio</u> ou <u>argumento central</u> e é representado por "<u>m</u>".

Para encontrar fàcilmente o ponto médio de uma classe de frequência acrescentamos metade do intervalo de classe ao limite inicial da classe. Por fórmula teremos :

$$m = {}^{l}i + \frac{i}{2}$$

m = ponto médio da classe
li = limite inicial da classe
i = intervalo de classe

A hipótese de que o ponto médio é o valor mais representativo de um intervalo verifica-se melhor quando o número de resultados da distribuição é grande e quando os intervalos não são muito extensos. Mas mesmo quando nenhuma dessas condições se verifica plenamente, a hipótese do ponto médio não incorre em grande êrro e é a melhor. No fim de contas, o número de resultados que recai acima dos diversos valores do ponto médio é quase igual ao dos que recaem abaixo dos mesmos, e a falta de equilíbrio de um intervalo é em geral compensada pela condição oposta do outro.

Assim sendo, calculando os pontos médios das classes da tabela 1 :

Intervalo de classe $10 - 0 = 10$
ou $20 - 10 = 10$
ou $30 - 20 = 10$

Metade do intervalo de classe $= \frac{i}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Como o ponto médio é a metade do intervalo de classe acrescida ao limite inicial de classe, temos consequentemente :

Tabela 3

Notas em um teste de conhecimentos

X(notas)	f	m
0 - 9	4	5
10 - 19	5	15
20 - 29	4	25
30 - 39	7	35
40 - 49	6	45
50 - 59	5	55
60 - 69	7	65

5. Regras Elementares para a construção de uma tabela de frequência:

Em vez da discussão geral das questões atinentes à construção de uma tabela de frequencia, a maioria dos autores se contenta em formular regras arbitrárias quanto ao número de classes a serem usadas em cada caso. Dentre elas as mais comuns são as que determinam que o número de classes deve variar entre 5 e 15 ou entre 5 e 20 ou, ainda, dentro de outros limites tão arbitrários como êsses. Entretanto isto parece bastante relativo, pois se tivermos 20 casos não podemos formar sequer 10 classes, enquanto que se forem 100.000 as ocorrências, poderemos perfeitamente distribuí-las por mais de 20 classes sem deixar de obter uma excelente distribuição.

Sturges procurou formular uma regra definida para determinação do número de classes, desde que conhecido o número de observações. Esta regra, chamada regra de Sturges, estabele que o número de classes seja determinado pela fórmula :

$$n = 1 + 3,3 \log N$$

onde :

n = número de classes

N = número de dados a distribuir

No caso da tabela 1, encontrar-se-ia :

$$n = 1 + 3,3 \log 50$$
$$n = 1 + 3,3 \times 1,69897$$
$$n = 1 + 5,606601$$
$$n = 6,606601$$

ou, arrendondando :

$$n = 7$$

A fórmula deriva-se do desenvolvimento do binômio de Newton que fornece bom ajustamento a muitas das distribuições ; a regra de Sturges é de fácil aplicação e pos-

[illegible]

poucas nos casos de grande número de dados.

A escolha do número de classes parece depender mais da natureza dos dados e da unidade em que forem expressos, que de regras mais ou menos arbitrárias e rígidas.

Quando, através da fórmula de Sturges ou por qualquer outro método, decidimos acêrca do número de classes a usar, surge um outro problema : o da determinação do intervalo de classe necessário para que a distribuição resulte em o número de classes anteriormente fixado.

Que intervalo de classe deverá ser então usado?

Anotados os dados de uma distribuição e observados os valores extremos, determinaremos a amplitude total que dividimos pelo número de classes determinadas pela <u>regra de Sturges</u> , ou pelo uso da razão ou base em experiências anteriores, encontrando-se assim o intervalo das classes que comporão a distribuição de frequência.

Seria, entretanto, pouco prático guiar-se rigorosamente pelo quociente da divisão da amplitude total pelo número de classes prèviamente determinado. Poderíamos poupar tempo e trabalho com o estabelecimento de um intervalo mais conveniente, atendendo-se às seguintes indicações :

a) achar a amplitude total da série, ou seja , a diferença entre o maior e o menor dos valores ocorrentes;

b) dividir essa amplitude pelo número de classes que se tiver fixado como razoável ;

c) arredondar o resultado e, se possível, para um número que facilite os cálculos .

Quando temos um número bastante numeroso de dados, não é necessário determinar com precisão, amplitude exata da distribuição ; bastará tão sòmente elegermos e, à primeira vista, aproximadamente, o maior e o menor dos valores, estipulando então a amplitude total aproximada.

Poderíamos resumir o que ficou dito linhas acima sôbre construção de uma tabela de frequência da seguinte maneira :

a) decidir, preliminarmente, se se vai ou não usar intervalos iguais de classes ; usar intervalos iguais sempre que fôr razoàvelmente possível ;

b) decidir sôbre o número de classes ;

c) calcular a amplitude total ;

d) dividir a amplitude total encontrada pelo número de classes fixado anteriormente ;

e) escolher intervalos de classes convenientes ;

f) determinar os limites de classes, sendo de preferência que os limites inferiores das classes sejam números inteiros, múltiplos de 5 ou 10.

g) fixados os respectivos limites, distribuir os valores observados pelas classes, anotando o número de ocorrências atribuído a cada classe.

Já nos referimos a conveniência de serem iguais os intervalos numa distribuição de frequência .

<u>Entretanto, há alguns casos em que o uso de intervalos desiguais é aconselhável como por exemplo</u> :

a) nas distribuições de frequência fortemente assimétricas que dão lugar a "caudas" demasiadamente longas em uma das extremidades da curva ;

b) a necessidade de ser conservada a confidencialidade de certos dados ;

c) o aparecimento de frequências pequenas ou nulas nas classes próximas aos extremos .

Frequentemente somos levado a certas conclusões precipitadas quando observamos distribuições de frequências que possuem intervalos de classe desiguais .

Podemos ter a impressão de que a maior concentração está contida na classe 70 - 89 ; se examinarmos, porém , cuidadosamente a tabela, notamos que o intervalo, na classe 70 - 89, é o dobro do das classes precedentes; portanto, se sos, visto que o intervalo de classe ē duas vēzes maior .

Como exemplo, observemos a tabela 4

<u>Tabela 4</u>

Extraordinārios pagos aos funcionārios
da Escola X, no mēs de março de 197..

X (cr$)	f
0 - 9	5
10 - 19	22
20 - 29	35
30 - 39	39
40 - 49	41
50 - 59	39
60 - 69	35
70 - 89	48
90 - 109	28
110 - 129	18
130 - 169	12
Σ f	322

Para eliminar tal ilusão, fazemos uma nova tabela dividindo-se as frequēncias das classes pelos seus respectivos intervalos, obtendo-se assim, frequēncias de classes desiguais ajustadas; eis como ficaria a tabela 4 .

Tabela 4-A

Tabela 4 - com frequências ajustadas

X (cr$)	f/i
0 - 9	0,5
10 - 19	2,2
20 - 29	3,5
30 - 39	3,9
40 - 49	4,1
50 - 59	3,9
60 - 69	3,5
70 - 89	2,4
90 - 109	1,4
100 - 129	0,9
130 - 169	0,3

6 - Frequências Relativas . Frequência Acumulada

Podemos ao invés de trabalhar com números absolutos, as chamadas frequências absolutas, preferir números relativos,calculando-se as frequências relativas com base 1, 100, 1.000, etc; sendo as mais comuns as frequências relativas percentuais .

Tomando o exemplo da Tabnela 1, calculam-se as frequências relativas percentuais (Tabela 5).

As frequências relativas são calculadas mediante regras de três simples :

$\sum f$ 100%

f .... x %

donde $x\% = \frac{f}{\sum f} X100$

Tabela 5

Notas obtidas em um teste de verificação escolar

X (Notas)	f	f%
0 - 9	4	8,0
10 - 19	5	10,0
20 - 29	4	8,0
30 - 39	7	14,0
40 - 49	6	12,0
50 - 59	5	10,0
60 - 69	7	14,0
70 - 79	4	8,0
80 - 89	3	6,0
90 - 100	5	10,0
$\sum f$	50	100,0

Podemos também acumular as frequências (absolutas ou relativas) conforme estejam situadas abaixo ou acima de determinado limite de classe. Isto será de fácil verificação com a construção das chamadas frequências acumuladas, que podem ser crescentes ou decrescentes, conforme se indica na tabela 6, completando a tabela 1, vista anteriormente.

Salienta-se que as frequências acumuladas podem ser calculadas utilizando-se as frequências absolutas - ou as frequências relativas.

Tabela 6

Notas obtidas em um teste de verificação escolar

X (Notas)	f	fa ↓	fa ↑
0 - 9	4	4	50
10 - 19	5	9	46
20 - 29	4	13	41
30 - 39	7	20	37
40 - 49	6	26	30
50 - 59	5	31	24
60 - 69	7	38	19
70 - 79	4	42	12
80 - 89	3	45	8
90 -100	5	50	5
$\sum f$	50	-	-

Utilizando os mesmos dados, tem-se as frequên - cias relativas (tabela 6.a).

Tabela 6.a

X (Notas)	f%	fa% ↓	fa% ↑
0 - 9	8,0	8,0	100,0
10 - 19	10,0	18,0	90,0
20 - 29	8,0	26,0	82,0
30 - 39	14,0	40,0	74,0
40 - 49	12,0	52,0	60,0
50 - 59	10,0	62,0	48,0
60 - 69	14,0	76,0	38,0
70 - 79	8,0	84,0	24,0
80 - 89	6,0	90,0	16,0
90 -100	10,0	100,0	10,0
$\sum f$	100,0	-	-

As frequências acumuladas crescentes são também chamadas frequências acumuladas abaixo de e as frequências acumuladas decrescentes são denominadas frequências acumuladas acima de :

A coluna de frequência acumulada "abaixo de " é constituída somando-se cada frequência simples com a frequência acumulada anterior : procedendo-se da mesma forma, porém - partindo da última casa, temos a coluna de frequência acumulada "acima de ". As expressões "abaixo de" e "acima de" referem-se respectivamente, aos limites finais e iniciais (superiores e inferiores) de cada classe .

7. Representação gráfica de uma distribuição de frequência

Frequentemente, a análise dos dados numéricos é auxiliada pela representação gráfica da distribuição de frequência.

São geralmente empregadas na representação gráfica de uma distribuição de frequência, as seguintes técnicas :

a) para as frequências simples o histograma e o polígono de frequência ;

b) para as frequências acumuladas : os diagramas das frequências acumuladas (a ogiva e a curva de Lorenz)

Antes, porém , dos detalhes a respeito da representação gráfica de uma distribuição de frequência, vejamos os princípios algébricos básicos aplicáveis a tôda representação gráfica. A construção de qualquer gráfico se faz com o auxílio de duas linhas ou eixos coordenados, um vertical, o eixo dos Y, e outro horizontal, o eixo dos X. Estas linhas são perpendiculares entre si, chamando-se origem, o ponto em que elas se interceptam. A origem é o ponto ZERO, ou também denominado, o ponto de referência de ambos os eixos. As distâncias medidas ao longo do eixo dos X para a direita de 0 , chamam-se positivas, para a esquerda negativas ; do mesmo modo, as distâncias medidas ao longo do eixo dos Y acima de 0 , são positivas e, abaixo são negativas .

As duas ortogonais formam quatro quadrantes, denominados respectivamente 1º, 2º 3º e 4º quadrantes, os quais podem ser fàcilmente identificados no gráfico abaixo, com os seus respectivos sinais :

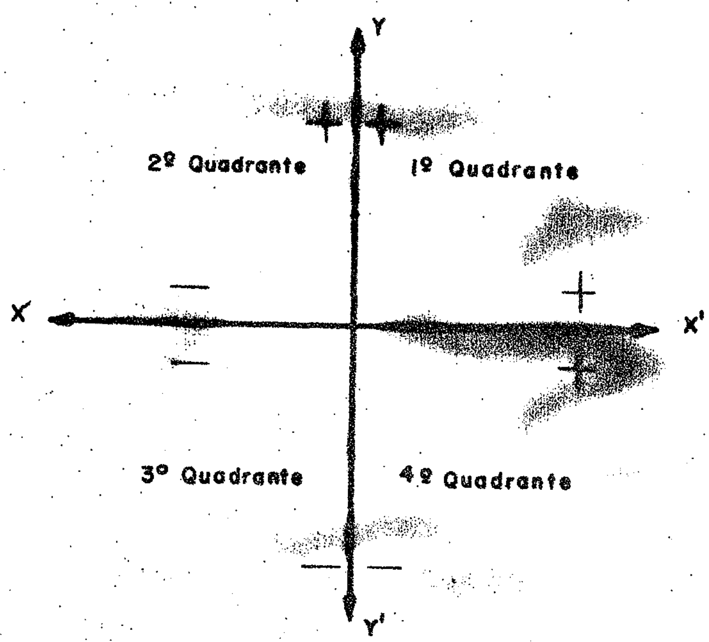


GRÁFICO 1

Para traçarmos por exemplo, o ponto "A" cujas coordenadas são X = 4 e Y = 3, tomamos a partir de O, quatro unidades sôbre o eixo dos X e três unidades para cima sôbre o eixo dos Y; onde as perpendiculares dêsses pontos se interceptam, estará o ponto "A".

A distância de um ponto a partir de O sôbre o eixo dos X chamamos abcissa, e a distância de um ponto a partir de O sôbre o eixo dos Y é denominada ordenada .

Para a construção de um polígono de frequência devemos adotar o seguinte processo :

a) marcação dos pontos na linha de base - marcar, sôbre a linha de base ou eixo das abcissas, os pontos médios das sucessivas classes de valores ;

b) marcação dos valores no eixo dos X - construir uma escala que parte da origem O até um ponto que representa a maior frequência; [illegible] um pouco maior do que a frequência mais alta da distribuição ;

c) <u>traçado de perpendiculares</u> - até encontrar, para cada traçado de duas ortogonais, um ponto .

d) <u>traçado do polígono de frequência</u> - uma vez fixados todos os pontos do gráfico, unem-se os mesmos por uma série de linhas para formar o polígono de frequência. A fim de completar a figura, isto é, trazê-la para a linha de base acrescenta-se na escala de X um intervalo na extremidade inferior da distribuição e outro na extremidade superior ; a frequência de cada um dêsses intervalos será, naturalmente, nula; daí, acrescentando-se os mesmos à escala, o polígono começa - meio intervalo abaixo do primeiro intervalo e termina meio intervalo acima do último intervalo, sôbre o eixo dos X.

A fim de dar simetria e equilíbrio ao polígono de frequência, faz-se mister um certo cuidado na seleção das unidades de distância que devem representar os intervalos no eixo dos X e as frequências no eixo dos Y. Uma unidade de X muito longa tende a alargar o polígono, ao passo que uma unidade de X muito curta tende a concentrar os pontos separados; o mesmo acontece com as unidades de Y. Uma regra prática consiste em conservar a altura 75% do tamanho da base ; ou, como se preferirmos a razão de 1:1,5 entre o eixo do Y e o de X.

A frequência total Σf de uma distribuição é representada pela área do respectivo polígono, isto é, a área limitada pela curva da frequência e o eixo dos X.

Seguimos as seguintes etapas na construção de um polígono de frequência :

a) - No eixo das abcissas marcam-se os limites - iniciais das classes e o limite final da - distribuição .

b) - No eixo das ordenadas constroe-se uma escala que irá até um valor um pouco superior - ao da distribuição de frequência .

c) - Marca-se, no eixo das abcissas, os pontos médios de cada uma das classes de valores da distribuição .

d) - Determina-se os pontos componentes do polígono, levantando-se por cada ponto médio uma perpendicular que irá encontrar à traçada da frequência correspondente situada no eixo dos YY'.

e) - Como polígono é uma figura fechada de muitos lados tem-se que "Completar" a figura, "fechando-a". Para isso, ligam-se os pontos representativos dos pontos médios - extremos com a metade dos intervalos laterais acrescentados no início e no fim da distribuição ; na figura 2, as linhas fechando o polígono de frequência estão mais expressas para despertar a atenção .

No gráfico 2 mostra-se o polígono de frequência - da tabela 1.

NOTAS OBTIDAS EM UM TESTE DE VERIFICAÇÃO ESCOLAR

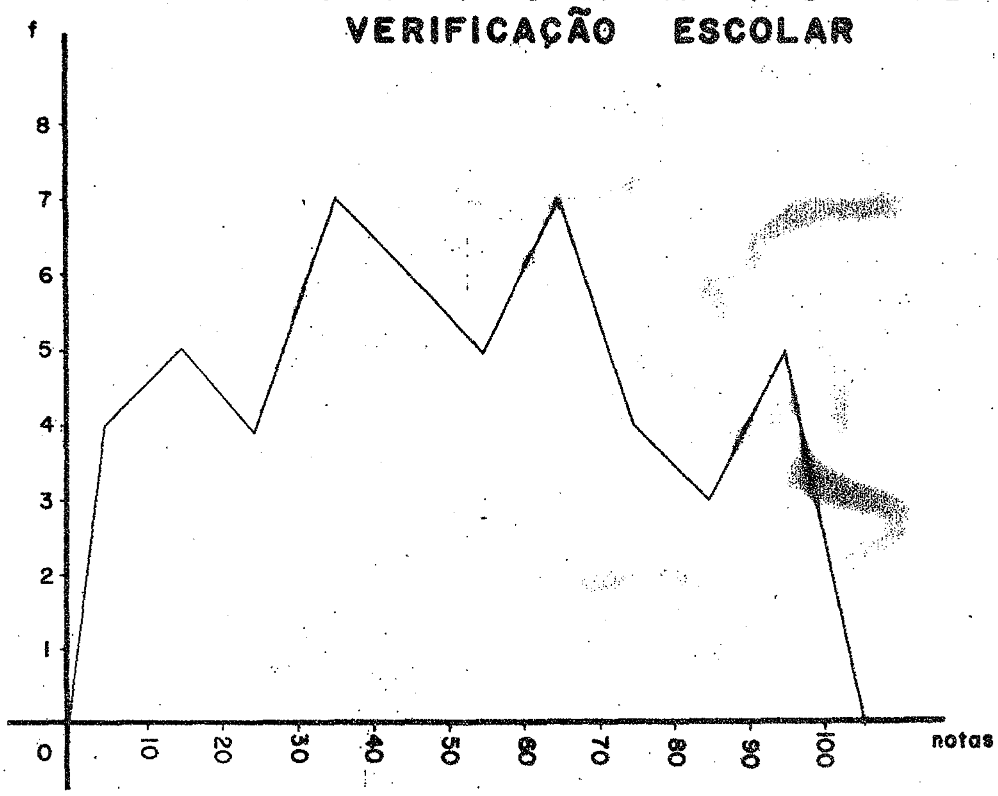
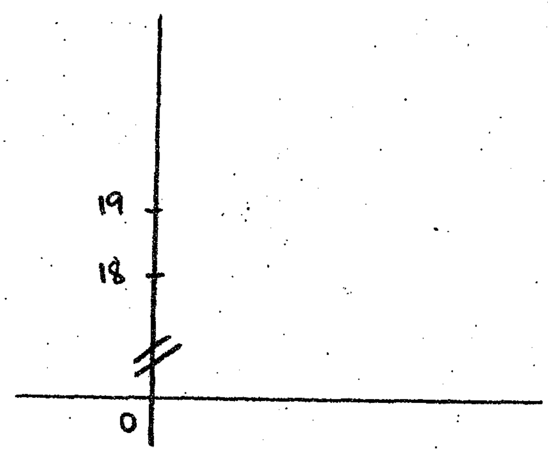


GRÁFICO 2

A distribuição de frequência dada como exemplo se inicia no valor ZERO; no entanto, a maioria das distribruições de frequências não se inicia com o valor ZERO. Por exemplo : se quiséssemos tomar conhecimento do número de estudantes existentes em uma unidade de ensino superior, a idade mínima da distribruição seria 18 anos ; portanto a primeira classe da distribuição de frequência referente a alunos universitários teria como limite inferior o valor 18. Quando isso acontece e como não se pode guardar proporcionalidade a distância do ponto ZERO até o valor 18, realizamos um "corte" entre o valor ZERO e valor 18; assim :



Uma segunda maneira de representar gráficamente uma distribuição de frequência é através do histograma, também chamado diagrama em colunas . A construção do histograma é quase idêntica à do polígono de frequência, salientando-se porém uma diferença importante : no polígono de frequência, todos os resultados dentro de determinado intervalo são representados pelo ponto médio do intervalo, enquanto no histograma supomos que tais resultados se distribuem, uniformemente, por todo o intervalo ; assim sendo, não usamos os pontos médios, mas as próprias classes. Alguns autores consideram que a frequência de cada classe estã representada pela área do retângulo levantado sôbre os limites inicial e final da classe ; assim, como a fórmula da área de um retângulo é :

$$A = b \times h$$

e como

$$A = \text{área} = \text{frequência de classe}$$
$$b = \text{base} = \text{intervalo de classe}$$
$$h = \text{altura}$$

basta calcular a altura .

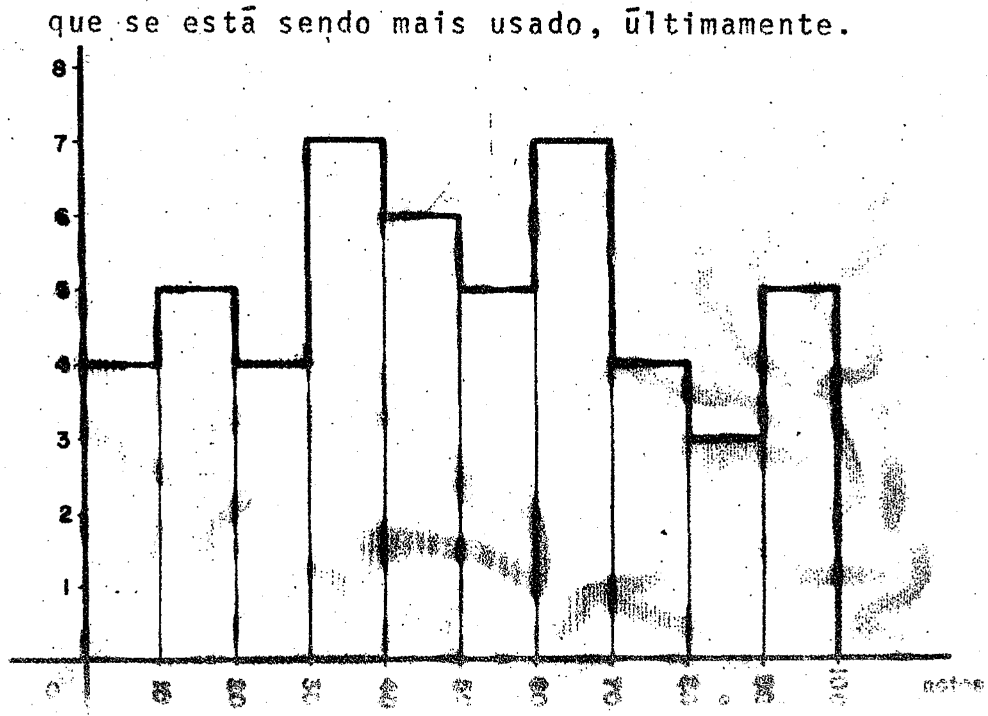
Usando a fórmula e tirando o valor da altura, tem-se

$$h = \frac{A}{b}$$

ou,

$$h = \frac{f}{i}$$

No gráfico 3, abaixo, entretanto, está construído o histograma com base na distribuição de frequência que consta da tabela 1 e não obedecendo à orientação dos que adotam a área do retângulo como representativa da frequência, o que se está sendo mais usado, últimamente.



Podemos, também, representar gràficamente as frequências acumuladas, tanto as crescentes como as decrescentes através dos diagramas de frequência acumulada, como exemplo a ogiva ou a curva de Lorenz.

Para construirmos o diagrama de frequência acumulada marcamos, nas abcissas, os valores da variável e nas ordenadas as frequências acumuladas. Nas abcissas sôbre os pontos limites superiores ou inferiores das classes são levantadas as perpendiculares, nas quais marcamos os pontos correspondentes. O diagrama de frequência tanto pode ser calculado com base em frequências absolutas - como em frequências relativas .

Suponhamos a distribuição abaixo

Tabela 7

Idades dos alunos da Escola X, Recife,1970

X (anos)	f	fa ↓
0 - 4	7	7
5 - 9	12	19
1o - 14	17	36
15 - 19	24	60
20 - 24	30	90
25 - 29	29	119
30 - 34	16	135
35 - 40	5	140
Σ f	140	-

O gráfico 4 é um diagrama de frequências acumuladas baseado nas frequências absolutas da tabela 7.

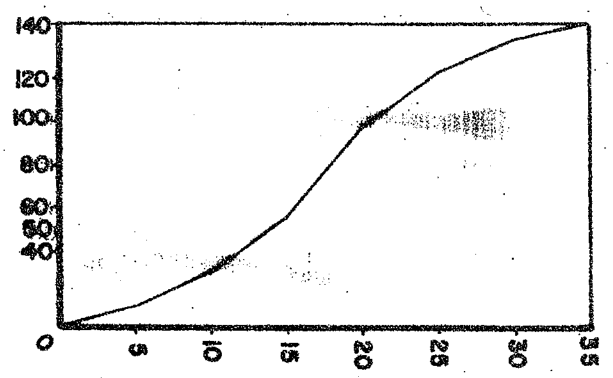


GRÁFICO 4

O problema de usar o polígono de frequência ou o histograma não pode ser respondido de modo geral, capaz de abranger todos os casos.

O polígono de frequência é menos preciso do que o histograma, face não representar precisamente (em têrmos de área) a frequência de cada classe de valor. Entretanto, tanto o polígono de frequência quanto o histograma são capazes de representar, gràficamente, uma distribuição de frequência quer sejam os valores distribuídos regularmente ou não .

8. Formas Comuns de Curvas de Frequências

A maioria das distribuições de frequências tem formato semelhante a um sino (curva campanular), resultante de uma grande concentração de casos no centro da distribuição e de poucas nas extremidades .

Mas as distribuições de frequência costumam -se apresentar segundo um dos quatro seguintes tipos principais :

a) distribuição normal ou simétrica, também chamada modal, curva de Gauss, ou em forma de sino. Possui um ponto de frequência máxima; as frequências crescem, gradualmente, para valores mais altos da variável, alcançam um máximo e decresce da forma inicial (gráfico 5).

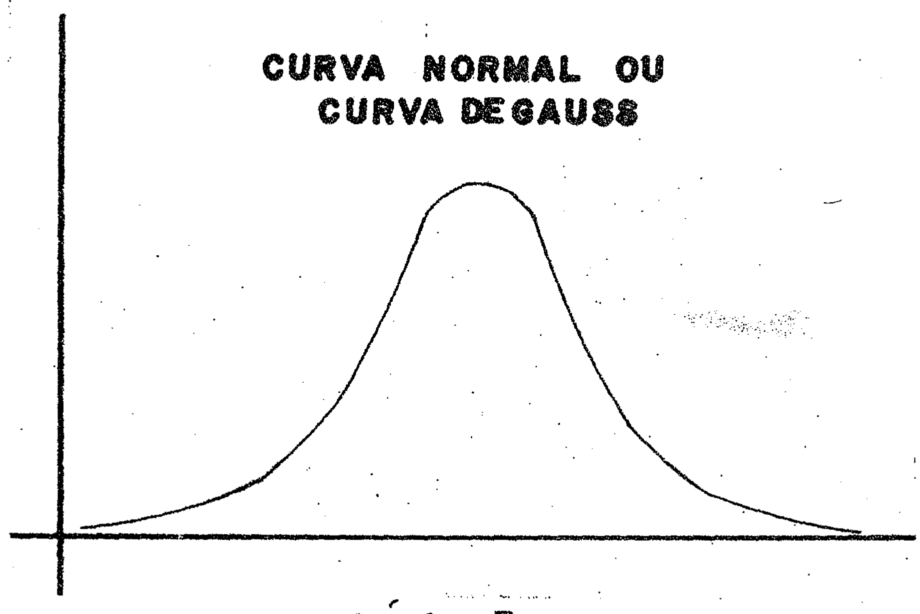


GRÁFICO 5

b) distribuição anti-modal ou curva em U - Possui um ponto de mínima frequência ; frequência máxima nos extremos e frequências que gradualmente decrescem para o centro da distribuição (gráfico 6).

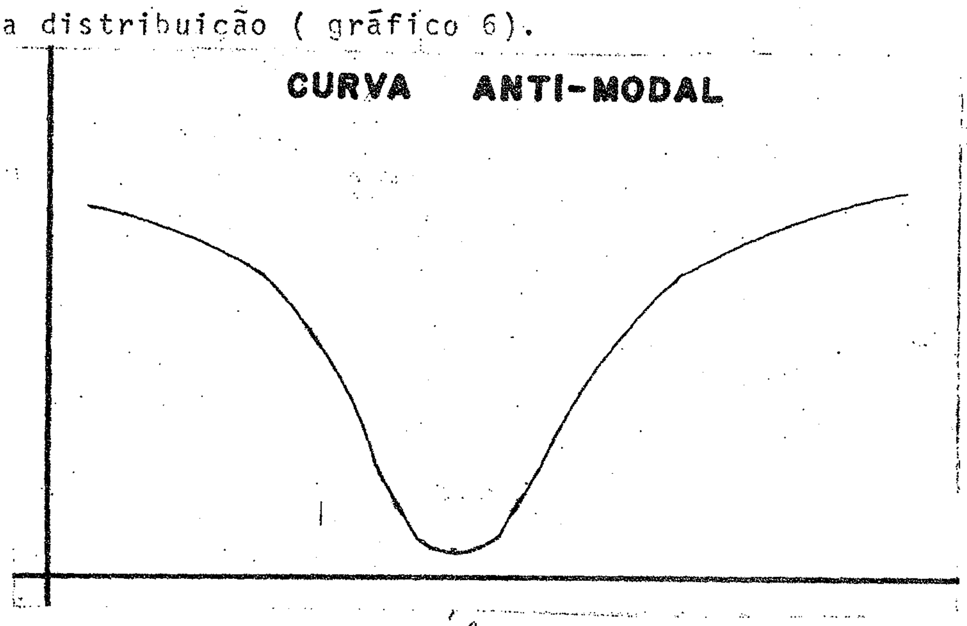


GRÁFICO 6

c) distribuição em J - Começa por uma frequência mínima, prosseguindo com frequências gradualmente crescentes. Juntamente com o quarto tipo, é conhecido como "distribuição a-modal" (Gráfico 7).

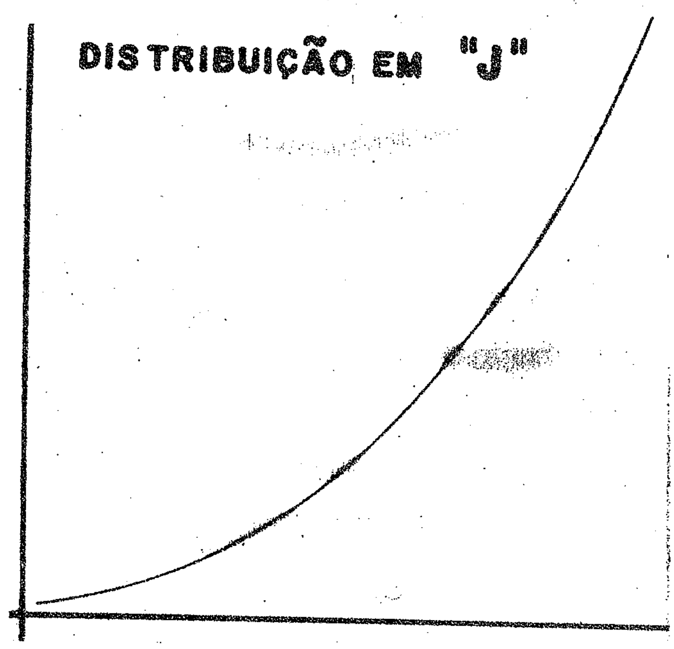


GRÁFICO 7

d) Distribuição em J invertido ou em L - começa por uma frequência máxima, prosseguindo com frequência gradualmente decrescentes (Gráfico 8).

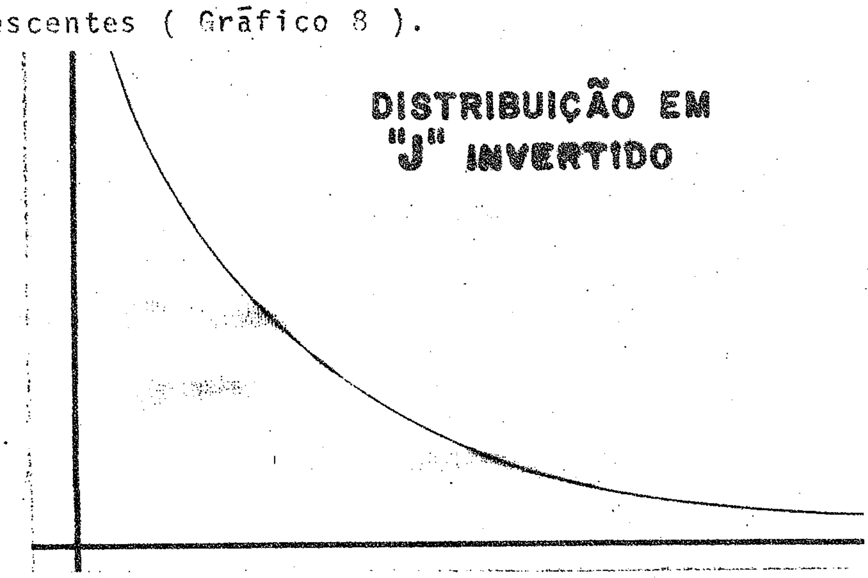


Gráfico 8

Existem outros tipos de curvas representativas de distribuições de frequência . Durante o transcorrer dos capítulos seguintes tomaremos contacto com outros tipos .

FAG/drc

Apostila 4 - Medidas de tendência central

1. Introdução

Em capítulos anteriores estudamos como se processava um levantamento estatístico e quais as técnicas necessárias a uma bem elaborada tabulação e apresentação gráfica .

Torna-se necessário, após a tabulação dos resultados e da representação gráfica, encontrar valores que possam representar a distribuição como um todo . São as chamadas medidas de tendência central, também denominadas medidas de posição central ou promédios .

O objetivo do cálculo das medidas de tendência - central de uma distribuição de frequência é duplo :

a) Do cálculo resulta um promédio que representa todos os resultados obtidos pelo grupo e, como tal, fornece uma descrição precisa do grupo como um todo .

b) O cálculo fornece a possibilidade de confronto entre dois ou mais grupos em têrmos de execução típica.

Os promédios mais conhecidos são a média, a mediana e a moda . Vejamos cada um deles, separadamente :

2. Médias

A média, a mais conhecida das medidas estatísticas, subdivide-se :

2.1. Média aritmética
2.2. Média geométrica
2.3. Média harmônica
2.4. Média quadrática
2.5. Média cúbica
2.6. Média biquadrática

/.

Todas elas, podem ser simples ou ponderadas. Vejamos, agora, cada uma delas, individualmente :

2.1. Média aritmética

2.1.1. Valores isolados simples

A média aritmética - ou, mais simplesmente, a média - é a soma dos resultados ou medidas divididas pelo seu número.

Assim sendo, tendo-se uma série de valores

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$$

a média aritmética, simbòlicamente representada por $\overline{x}$, dêsses n elementos será igual a

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}{n}$$

sendo n = número de valores.

Simplificando o acima exposto, podemos dizer que a média aritmética de n valores é igual a

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

Exemplo 1

Se um estudante recebe nota 5 no primeiro dia de aula, 7 no segundo, 9 no terceiro, 10 no quarto e 6 no quinto, obtem-se sua nota média dividindo a soma das notas pelo número delas.

Assim sendo :

$$\overline{x} = \frac{5 + 7 + 9 + 10 + 6}{5} = \frac{37}{5} = 7{,}40$$

Assim, o conjunto de notas obtidas pelo aluno pode ser representado pela média aritmética, cujo valor calculado foi de 7,40.

2.1.2. Valores isolados ponderados

Suponhamos, agora, uma série de valores repetidos .

$$\underbrace{x_1, x_1, x_1, \ldots\ldots x_1}_{p_1 \text{ vêzes}}, \quad \underbrace{x_2, x_2, \ldots x_2}_{p_2 \text{ vêzes}} \ldots\ldots \underbrace{x_n, x_n, \ldots\ldots x_n}_{p_n \text{ vêzes}}$$

Cada um dêsses valores repetidos tem um <u>pêso</u>, aqui representado pela letra "p".

Assim , quando as medidas $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, tiverem, respectivamente, os pêsos $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$, a média aritmética será igual a

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots\ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n}$$

ou generalizando,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} pi \ x_i}{\sum_{i=1}^{n} pi} \qquad (2)$$

Assim, a média aritmética será a aplicação da fórmula (2).

Donde , $\bar{x} = \frac{311}{50}$ . . $\bar{x}$ = 6,22

O valor 6,22 representa, como média aritmética, o conjunto das notas obtidas naquêle grupo de alunos .

2.1.3. Valores grupados

Se as medidas estiverem agrupadas numa distribuição de frequência, o cálculo da média se processa de forma ligeiramente diferente das apresentadas acima.

Nas distribuições de frequência, os resultados agrupados em intervalos de classe, perdem sua identidade e são representados pelo ponto médio (m) de cada intervalo . Calculando primeiramente o ponto médio de cada intervalo de classe da distribuição, estamos recaindo no caso anterior - ou na média aritmética de valores isolados com pêsos (agora denominados frequências) diferentes .

Assim :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=i}^{n} fi \ mi}{N} \qquad (3)$$

Sendo N = O total de frequências

Exemplo 3

Calculemos, com os dados abaixo, a média das ho ras extraordinárias trabalhadas durante um determinado mês , por um grupo de funcionários de uma escola .

X (~~ho~~ras)	f
0 - 9 ...	9
10 - 19 ...	11
20 - 29 ...	12
30 - 39 ...	10
40 - 50 ...	8
Σf ...	50

Calculando os pontos médios e multiplicando cada ponto médio pela respectiva frequência, obteremos :

X	f	m	fm
0 - 9	9	5	45
10 - 19	11	15	165
20 - 29	12	25	300
30 - 39	10	35	350
40 - 50	8	45	360
Σ	50	-	1220

A média aritmética será então :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{N} = \frac{1220}{50}$$

$$\bar{x} = 24{,}40 \text{ hs.}$$

2.1.4. <u>Média aritmética a partir de amostras ou grupos combinados</u>

Suponhamos que, em um grupo de N_1 estudantes a média de dias de trabalho trimestral, num determinado Departamento, seja de x_1 dias e que, no mesmo Departamento, outro grupo de N_2 apresente $\bar{x}_2$ como média de dias de trabalho trimestral.

A média dos dois grupos em conjunto será :

$$\bar{x}_c = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2} \qquad (4)$$

Logo, a média ponderada de <u>n</u> grupos será

$$\bar{x}_c = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + N_3 \bar{x}_3 + \ldots + N_n \bar{x}_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n} \qquad (5)$$

2.1.5. Média aritmética pelo processo breve

A média do Exemplo 3 foi calculada multiplicando-se o ponto médio de cada intervalo pela frequência (número de resultados) dêsse intervalo, somando-se êsses valores - ($\sum$ fimi) e dividindo-os pelo total dos resultados ; êste processo é denominado processo longo e, apesar de produzir resultados mais exatos, frequentemente exige a manipulação de números grandes e implica em cálculos extremamente - cansativos, podendo-se para atenuar estas dificuldades, efetuar o cálculo da média pelo chamado processo codificado ou breve .

É importante compreender que no cálculo da média aritmética pelo processo abreviado se imagina ou se supõe uma média como ponto de partida, média arbitrária ou média aritmética suposta ($\overline{x}o$), para mais adiante obter, através de uma correção, a média real.

Podemos tomar, como média arbitrária, qualquer ponto médio da distribuição, sendo mais conveniente, no entanto, escolher um ponto médio que esteja situado nas proximidades do centro da distribuição e, d'entre os pontos médios que estão situados nas proximidades do centro da distribuição, o ponto médio de maior frequência .

Resumimos o processo de cálculo da média aritmética pelo processo abreviado aos seguintes pontos :

a) - tabulamos os resultados ou medidas numa distribuição de frequência ;

b) - supomos uma média arbitrária ($\overline{x}$ o) tão próxima quanto possível do centro da distribuição e de preferência no intervalo que contenha a maior frequência ;

c) - achamos o desvio entre cada ponto médio e a média arbitrária, em unidades de intervalo de classe - (d'); dizemos em unidade do intervalo de classe, porque subtraindo o ponto médio dos demais pontos e dividindo-se pelo intervalo de classe, obtemos os desvios em unidades do intervalo de classe ;

d) - multiplicamos ou ponderamos cada desvio (d') pela frequência correspondente (fi) ;

e) - achamos a soma algébrica das "fd'"positivas e negativas e dividimos essa soma pelo número de casos- (N); daí resulta a correção, em unidades do intervalo - de classe (C') ;

f) - multiplicamos "C'"pelo intervalo de classe i , obtendo a correção do resultado (C = C' x i) ;

g) - somamos algèbricamente C à média arbitrária $\overline{x}$o para obter a média geral .

Assim, seja uma distribuição teórica com os pontos médios e as frequências :

mi	fi
m_1	f_1
m_2	f_2
m_3	f_3
...	...
...	...
m_n	f_n

Calculando teremos

mi	fi	di	$d'i = \frac{di}{i}$	fid'i
x_1	f_1	d_1	d_1'	$f_1d'_1$
x_2	f_2	d_2	d_2'	$f_2d'_2$
x_3	f_3	d_3	d_3'	$f_3d'_3$
...	...	...	...	....
...	...	...	...	....
....	...	...	...	....
x_n	f_n	d_n	d_n'	f_nd_n'

onde

$$d_1 = x_1 - \overline{x}o$$

$$d_2 = x_2 - \overline{x}o$$

$$d_3 = x_3 - \overline{x}o$$

....

....

$$dn = x_n - \overline{x}o$$

Assim, a média aritmética será igual a

$$\overline{x} = \overline{x}o \pm C' \qquad (6)$$

A correção C será igual a

$$C' = \frac{\sum_{i=1}^{n} fidi}{N} \times i \qquad (7)$$

Assim, a média aritmética pelo processo codificado será igual a

$$\bar{x} = \bar{x}o \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} fidi}{N} \cdot i \qquad (8)$$

O cálculo da média aritmética pelo processo abreviado, com os dados do exemplo 3, acha-se a seguir :

X (Horas)	fi	mi	di	$d'i = \frac{di}{i}$	fid'i
0 - 9	9	5	- 20	- 2	- 18
10 - 19	11	15	- 10	- 1	- 11
20 - 29	12	25	-	-	-
30 - 39	10	35	10	1	10
40 - 50	8	45	20	2	16
Σ f	50	-	-	-	- 3

$\bar{x}_o = 25$

Dividindo $\sum fd'$ por N teremos a correção em unidades de intervalo de classe. Assim ,

$$C' = \frac{\sum fd'}{\sum f} = \frac{-3}{50} = -0{,}06$$

Multiplicando C' por i obteremos C que é a correção do resultado

$$C = C' \cdot i$$

$$C = -0{,}06 \cdot 10 = -0{,}6$$

Somando algèbricamente C à média arbitrária $\bar{x}o$, obteremos a média aritmética real.

Assim :

$$\bar{x} = \bar{x}o \pm C$$

$$\bar{x} = 25 - 0{,}6$$

$$\bar{x} = 24{,}4 \text{ horas}$$

A média aritmética encontrada pelo <u>processo abreviado</u> foi igual à calculada pelo denominado <u>processo longo</u> .

2.1.6. <u>Propriedades da média aritmética</u>

2.1.6.1. <u>A Soma algébrica dos desvios é nula</u>

Numa série estatística sejam os seguintes termos:

x_1 , x_2 , x_3 ...... x_n , e $\overline{x}$ o valor da média aritmética.

Tem-se que

$d_1 = x_1 - \overline{x}$

$d_2 = x_2 - \overline{x}$

$d_3 = x_3 - \overline{x}$

....

....

$dn = x_n - \overline{x}$

Somando ordenadamente estas igualdades, tem-se :

$$d_1+d_2+d_3 + \ldots + d_n = x_1+x_2+x_3+ \ldots +x_n - n\overline{x}$$

Como $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots X_n}{n}$, tem-se que

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n - n \left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)$$

/.

donde

$$d_1 + d_2 + d_3 + .. + d_n = x_1 + x_2 + x_3 + .. + x_n - (x_1 + x_2 + x_3 + .. + x_n)$$

$$d_1 + d_2 = d_3 + .. + d_n = x_1 + x_2 + x_3 + .. + x_n - x_1 - x_2 - x_3 - ... - x_n$$

Assim

$$d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_n = 0$$

Representando

$$d_1 + d_2 + d_3 + ... d_n \text{ por } \sum_{i=1}^{n} di$$

teremos

$$\sum_{i=1}^{n} di = 0 \qquad (9)$$

2.1.6.2. <u>A soma dos quadrados dos desvios calculados em relação à média aritmética é um mínimo</u>

Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} (xi - \overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{n} (xi - a)^2$$

$$\text{para } a \neq \overline{x}$$

Temos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2 x_i\overline{x} + \overline{x}^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \overline{x} n \overline{x} + n \overline{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

Por outro lado :

$$R = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n} x_i + na^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 a n \overline{x} + na^2$$

Subtraindo R de S teremos :

$$R - S = na^2 - 2 a n \overline{x} + n \overline{x}^2$$

$$R - S = n(a^2 - 2a\overline{x} + \overline{x}^2) = n(a - \overline{x})^2$$

Como n = positivo

e

$(a - \overline{x})^2$ = positivo, teremos

$R - s > o$

donde

$R > S$

ou

$S < R$ como queríamos demonstrar.

Assim

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \qquad (10)$$

Portanto qualquer que seja o valor xo escolhido, a soma dos quadrados dos desvios em relação a $\overline{x}$ será menor do que em relação a dos afastamentos calculados em função de $xo \neq \overline{x}$

2.1.6.3. Numa distribuição de frequência a soma dos produtos dos desvios dos pontos médios pelas respectivas frequências é zero . Logo

$$\sum_{i=1}^{n} fidi = 0 \qquad (11)$$

2.1.6.4. <u>Multiplicando-se ou dividindo-se tôdas as frequências de uma distribuição por uma constante, a média não se altera.</u>

2.1.6.5. <u>Somando-se ou subtraindo-se uma constante algèbricamente a todos os elementos de um conjunto a média fica algèbricamente aumentada ou diminuida desta constante</u> .

2.2. Média geométrica

Denominamos de média geométrica de um conjunto de n valores, à raiz n - ésima do produto dêsses n valores .

Tomando $\overline{x}g$ como média geométrica, podemos dizer que

$$(\overline{x}_g)^n = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad (12)$$

($\prod$ é o símbolo que indica os produtos dos valores de xi).

Extraindo a raiz n-ésima temos

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \qquad (13)$$

Em geral recorremos a logaritmos para o cálculo dessa média .

/.

2.2.1. Valores isolados simples

Em uma série de valores, x_1, x_2, x_3 ... xn, temos que a média geométrica será

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ..... xn}$$

Aplicando o logarítmo :

$$\log \bar{x}_g = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ... + \log xn}{n}$$

Exemplo 4

Calcular a média geométrica de 8, 17 e 22

Assim :

$$\bar{x}_g = \sqrt[3]{8 \times 17 \times 22}$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[3]{2992} \therefore \bar{x}_g = 14.4$$

2.2.2. Valores isolados ponderados

O cálculo da média geométrica de valores ponderados é idêntico ao caso precedente, apenas elevando cada um dos valores a uma potência igual ao respectivo pêso e extraindo-se a raiz n-ésima, sendo n igual a soma dos pêsos .

Exemplo 5

Sejam os seguintes valores com os seus respectivos pêsos :

Valores	Pêsos
50	1
70	1
45	2
60	4

Fazendo então a seguintes tabela :

Valores (x)	Pêsos (p)	x^p
50	1	50^1
70	1	70^1
45	2	45^2
60	4	60^2

A média geométrica será por conseguinte :

$$\bar{x}_g = \sqrt[8]{50 \times 70 \times 45^2 \times 60^4}$$

Aplicando logarítmo, vem :

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{8}(\log 50 + \log 70 + 2 \log 45 + 4 \log 60)$$

Achando-se os logarítmos e efetuando as operações, encontramos

$$\log \bar{x}_g = 1,74539$$

cujo anti-logarítmo será

$$\bar{x}_g = 55,64$$

2.2.3. Valores grupados

Se se considerar uma distribuição de frequências cujos pontos médios sejam m_1, m_2, ... m_n e suas frequências, respectivamente, f_1, f_2 ... f_n, a média geométrica será :

$$\bar{x}_g = \sqrt[f_1+f_2+\dots+f_n]{m_1^{f_1} + m_2^{f_2} + \dots + m_n^{f_n}}$$

Aplicando logarítmos temos consequentemente :

$$\log \bar{x}_g = \frac{f_1 \log m_1 + f_2 \log m_2 + \dots + f_n \log m_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Fazendo

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$$

e

$$f_1 \log m_1 + f_2 \log m_2 + \dots + f_n \log m_n = \sum_{i=1}^{n} fi \log m_i \; .$$

temos que :

$$\log \bar{x}_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \log m_i}{N} \qquad (14)$$

Exemplo 6

Calcular a média geométrica da distribuição de frequência abaixo

X	f
6 - 8	241
8 - 10	809
10 - 12	1.034
12 - 14	464
14 - 16	159
16 - 18	26
18 - 20	14
20 - 22	3
$\sum$ f	2.750

Calculando os pontos médios da distribuição de frequência acima, achando os seus respectivos logarítmos e ponderando-os pelas frequências de cada classe :

X	fi	mi	log mi	fi log mi
6 - 8	241	7	0,8451	203,6691
8 - 10	809	9	0,9542	771,9478
10 - 12	1.034	11	1,0414	1.076,8076
12 - 14	464	13	1,1139	516,8496
14 - 16	159	15	1,1761	186,9999
16 - 18	26	17	1,2304	31,9904
18 - 20	14	19	1,2788	17,9032
20 - 22	3	21	1,3222	3,9666

donde

$$\log \bar{x}_g = \frac{2.810,1342}{2.750} = 1,0218$$

Calculando o anti-logarĩtmo, encontramos a mẽdia geomẽtrica da distribuição de frequẽncia acima .

$$\bar{x}_g = 10,52$$

2,2.4. <u>Propriedade da mẽdia geomẽtrica</u>

" <u>O produto dos desvios dos tẽrmos da sẽrie com relação ã mẽdia geomẽtrica ẽ igual a 1</u>".

Sabendo que a mẽdia geomẽtrica de uma sẽrie de tẽrmos x_1 , x_2, x_3,... x_n

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 .\ x_2 .\ x_3 .\ \ldots .\ x_n}$$

podemos escrever

$$\bar{x}_g^{\,n} = x_1 .\ x_2 .\ x_3 .\ \ldots\ x_n$$

Sendo os desvios dos tẽrmos da sẽrie com respeito ã mẽdia geomẽtrica

$$\frac{\bar{x}_g}{x_1},\ \frac{\bar{x}_g}{x_2},\ \frac{\bar{x}_g}{x_3}\ \ldots\ \frac{\bar{x}_g}{x_n}$$

2.3.1. Valores isolados

A média harmônica de uma série de valores é igual à recíproca da média aritmética das recíprocas dêsses valores .

Chamando $\bar{x}_h$ à medida de duas quantidades x_1 e x_2, teremos :

$$\frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}}{2} = \frac{\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2\ x_1 \quad x_2}$$

donde

$$\frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{2\, x_1\, x_2}{x_1 + x_2} \qquad (16\ )$$

Se considerarmos agora três quantidades x_1, x_2, x_3, a média harmônica será

$$\frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}}{3} = \frac{\dfrac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}}{3}$$

$$\frac{1}{\overline{x}_h} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{3x_1x_2x_3}$$ e consequentemente :

$$\overline{x}_h = \frac{3x_1x_2x_3}{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}$$

Generalizando, em uma sērie de n tērmos x_1, x_2, x_3..... x_n , a mēdia harmônica serā :

$$\overline{x}_h = \frac{nx_1x_2x_3 \ldots\ldots\ldots x_n}{\text{Soma dos produtos de ordem } (n - 1)} \qquad (17)$$

Exemplo 7

Calcular a mēdia harmônica dos seguintes valores : 50, 70, 45.

Aplicando a fōrmula (17) teremos :

$$\overline{x}_h = \frac{3.\ 50.\ 70.\ 45.}{50.45 + 50.70 + 70.45} = \frac{472.500}{2250 + 3500 + 3.150}$$

donde

$$\overline{x}_h = \frac{472.500}{8900} = 53{,}08$$

2.3.2. Valores Grupados

Com os valores ponderados isolados e nas distribuições de frequência (onde se trabalha com pontos médios) a fórmula adotada é a seguinte :

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{fi}{mi}} \qquad (18)$$

Exemplo 8

Calculemos a média harmônica baseada na distribuição de frequência do Exemplo 6.

X	fi	mi	fi/mi
6 - 8	241	7	34,4
8 - 10	809	9	89,9
10 - 12	1 034	11	94,0
12 - 14	464	13	35,7
14 - 16	159	15	10,6
16 - 18	26	17	1,5
18 - 20	14	19	0,7
20 - 22	3	21	0,1
$\sum$	2 750		266,9

A média harmônica vem a ser :

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{8} \frac{fi}{mi}} = \frac{2\ 750}{266,9}$$

$$\bar{x}_h = 10,30$$

2.4. Demonstração relativa às três médias estudadas :

Demonstra-se que, relativamente às médias aritmética, geométrica e harmônica, tem-se :

$$A > G > H$$

Raciocinemos por partes : em primeiro lugar ,

$$A > G$$

Suponhamos dois números x e y

Então temos

$$\frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$$

elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade :

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} > xy$$

eliminando o denominador :

$$x^2 + 2xy + y^2 > 4\,xy$$

simplificando :

$$x^2 + 2\ xy + y^2 - 4\ xy > 0$$

donde

$$x^2 - 2\ xy + y^2 > 0$$

donde

$$(\ x - y)^2 > 0$$

logo conclui-se

$$A > G$$

Em segundo lugar

$$G > H$$

Com os mesmos números x e y tem-se

$$\sqrt{xy} > \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

efetuando a soma e elevando ao quadrado :

$$xy > \left(\frac{2\ xy}{x + y}\right)^2$$

eliminando o denominador :

$$xy\ (x+y)^2 > (2\ xy)^2$$

dividindo tudo por xy e desenvolvendo :

$$x^2 + 2\ xy + y^2 > 4\ xy$$

donde se chega à conclusão verificada na primeira parte .
logo :

$$G > H$$

Quando os valores não são muito dispersos, verifica-se aproximadamente a relação

$$G = \frac{A + H}{2} \qquad (19)$$

2.5. <u>Outros tipos de médias :</u>

Além do que já se viu, existem outros tipos de médias, aplicadas raramente ou em casos especialíssimos, que fogem ao objetivo do presente trabalho .

Média anarmônica de uma série de valores X_1 , X_2, X_3 , ...X_n, representada por $\overline{x}_h$, , exprime-se da seguinte forma :

$$\bar{x}_{h'} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \;....+X_n^2}{X_1 + X_2 + X_3 + \;....+X_n} \qquad (20)$$

ou ainda

$$\bar{x}_{h'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^2}{\sum_{i=1}^{n} Xi}$$

Média quadrática($\bar{x}_q$) de n valores é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos valores :

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \;....+ x_n^2}{n}} \qquad (21)$$

Média cúbica (ou $\bar{x}_c$) de n valores é a raiz cúbica da média aritmética dos cubos dos valores :

$$\bar{x}_c = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \;.... x_n^3}{n}} \qquad (22)$$

/.

Média biquadrática ($\bar{x}_{bq}$) de n valores é a raiz quarta da média aritmética dos valores elevados à quarta potência.

$$\bar{x}_{bq} = \sqrt[4]{\frac{x_1^4 \; x_2^4 \; x_3^4 \; \ldots\ldots x_n^4}{n}} \qquad (23)$$

A média quadrática tem uma aplicação especial na hipótese de valores positivos e negativos, como no caso dos afastamentos em tôrno da média aritmética, quando não interessar o sentido do sinal.

3. M E D I A N A

Chamamos elemento mediano de um conjunto aquêle que o separa em dois subconjuntos do mesmo número de valores de tal forma que o seu valor seja maior que os valores do 1º subconjunto e menor que os valores do 2ºsubconjunto.

Indicamos êsse elemento por Emd.

Assim mediana é o valor do elemento mediano que se indica por "md".

Suponhamos um grupo de 5 indivíduos com as seguintes estaturas : 1,50m, 1,60m, 1,65m, 1,70m e 1,85m arranjadas as medidas por ordem de grandeza, o elemento mediano é aquêle situado no centro da distribuição, ou seja, o terceiro indivíduo cuja estatura é 1,65 m.

Se, em vez de um número impar de elementos, tivermos uma quantidade par, o valor do elemento mediano será a média aritmética dos dois valores centrais .

Exemplo :

Imaginemos um grupo de 6 pessoas cujas alturas, medidas em centímetros, fôssem as seguintes: 160cm, 165 cm, 175cm, 177 cm, 180 cm e 182cm.

Postas em ordem crescente os indivíduos de estatura 175 e 177 cm seriam os elementos centrais do conjunto , e a mediana seria a média dos dois valores, ou seja, 176 cm.

Na prática estabelecemos o seguinte, trabalhando - com distribuições de frequência :

a) quando fôr impar o universo, a fórmula para achar o elemento mediano será

$$Emd = \frac{N + 1}{2} \qquad (24)$$

onde N = total do universo;

b) quando fôr para o universo, então se aplica a fórmula

$$Emd = \frac{N}{2} \qquad (25)$$

3.1. Cálculo da Mediana

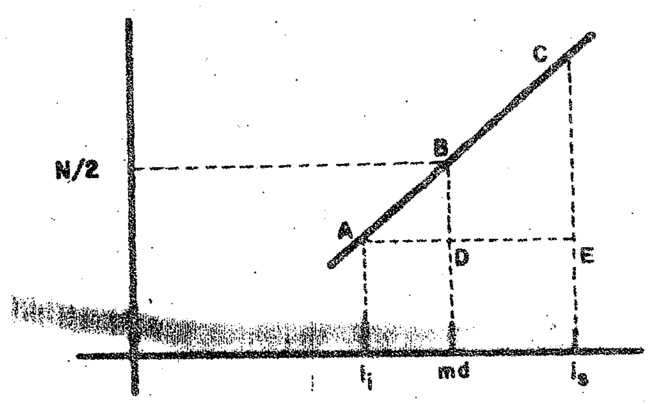
Calculado o elemento mediano Emd do conjunto, necessitamos encontrar o seu valor .

Como

$$d = Emd - fa_{m-1}$$, substituindo obtemos

$$md = li + \frac{(Emd - fa_{m-1})\ i}{f_m} \quad (29)$$

Discutindo a fórmula , consideremos o gráfico das frequências acumuladas de uma distribuição de frequência a baixo :



Supondo-se que a curva determinada por A e C é aproximadamente reta, pela semelhança dos triângulos ABD e ACE tem-se:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BD}{AD}$$

Porém, como CE = f_m (frequência da classe mediana)

$BD = N/2 - fa_{m-1}$

$AE = i$

$AD = md - li$

Substituindo vem :

$$\frac{fm}{i} = \frac{N/2 - fa_{m-1}}{md - li}$$

donde

$$md - li = \frac{\left(\frac{N}{2} - fa_{m-1}\right) i}{f_m} \qquad (30)$$

passando <u>li</u> para o segundo membro, chegamos a uma valor idêntico ao da fórmula 29.

Sabendo que

$$\frac{N}{2} = \text{Emd} \text{ , logo}$$

$$md = li + \frac{(\text{Emd} - fa_{m-1})\, i}{fm} \qquad (31)$$

<u>Exemplo 9</u> :

Calcular a mediana da distribuição de frequências

/.

abaixo :

X (anos)	fi	fi_a
10 - 14	4	4
15 - 19	109	113
20 - 24	216	329
25 - 29	209	538
30 - 34	135	673
35 - 39	78	751
40 - 44	31	782
45 - 49	16	798
50 - 54	12	810
55 - 60	3	813
$\sum f$	813	

O primeiro passo é o cálculo das frequências acumuladas ; posteriormente, calculamos o elemento mediano :

$$Emd = \frac{N + 1}{2}$$

$$Emd = \frac{813 + 1}{2} = 407$$

Tomamos N + 1, pois o total da distribuição de frequências é ímpar .

Achado o elemento mediano e aplicando a fórmula

(31), temos :

$$md = li + \frac{(Emd - fa_{i-1})\,i}{fm}$$

onde

$li = 25$
$Emd = 407$
$fa_{i-1} = 329$
$i = 5$
$fm = 209$

então

$$md = 25 + \frac{(407 - 329)\,5}{209}$$

donde

$$md = 25 + \frac{78}{209} \cdot 5$$

$$md = 25 + 1{,}9$$

$$md = 26{,}9 \text{ anos}$$

A mediana é muito empregada em pesquisas onde não interessam valores extremos, por terem pouca significação para o conjunto em geral.

Gráficamente também podemos determinar a mediana, em forma aproximada, utilisando-se para isto o polígono de frequências acumuladas . A mediana é a abcissa correspondente à ordenada do valor igual à metade da frequência total (universo par) ou à metade da frequência total mais um (universo ímpar).

/.

A mediana é uma separatriz.

Entendemos por separatriz um promédio que divide a distribuição ou a massa de dados em partes ; assim na mediana, por exemplo, metade dos indivíduos tem valores inferiores ao da mediana, e a outra metade tem valores superiores.

Uma vez que se trata de um valor separando a distribuição em partes, de modo que uma fração de valores lhe seja inferior e os restantes superiores, podemos dizer que tôda separatriz tem um número de ordem n, ou seja :

$$n = \frac{b\ (N + 1)}{c}$$

em que c = o grâu

b = o genero

Então:

c = 2 e b = 1 - mediana (md)

c = 4 e b = 1,2 e 3 - quartis (Qi)

c = 10 e b = 1,2 ... e 9 - decis (Di)

c = 100 e b = 1,2, e.....e 99 - centis (Ci)

Para o cálculo de um separatriz qualquer precisamos sempre das frequências acumuladas .

4. M O D A

Denominamos <u>moda</u> ou, às vêzes, <u>norma</u>, ou ainda <u>tipo dominante</u>, <u>valor de máxima densidade</u>, <u>valor dominantes de um conjunto de valores</u>, ao valor que possui a maior frequência que os valores contíguos do conjunto (anterior e posterior) ordenado .

De acôrdo com a definição acima, um conjunto de valores pode possuir mais de uma moda. Dizemos, se assim acontecer, que o conjunto é pluri-modal; em caso contrário, que é uni-modal .

Foi KARL PEARSON que, pela primeira vez utilizou o têrmo moda , em 1895, talvez influenciado pela maneira de falar: tal objeto está na moda, significando coisa mais frequente.

Numa distribuição de frequência chamamos classe modal a classe que possui maior frequência. Como o ponto médio é representativo de qualquer classe de frequências, chamamos moda bruta o ponto médio da classe modal. Se tivermos uma classe modal 160 - 165 cm, a moda bruta será então 162,5 m .

Existe a possibilidade de calcularmos a moda usando-se uma fórmula empírica, bastando, entretanto, que a distribuição seja dividida em escalas de unidades muito pequenas, sendo o $\sum fi$ grande e o polígono de frequência regular.

Satisfeitas as exigências acima, temos que

$$Mo = 3\ Md - 2\bar{x} \qquad (32)$$

Se quisermos calcular a moda mais exatamente, pode-se escolher dois processos : o de KING ou o de CZUBER .

4.1. Cálculo da Moda pelo processo de KING

Neste processo consideramos a influência, sôbre a classe modal, das frequências das classes adjacentes, o que faz com que a moda se desloque dentro do intervalo de classe para um ponto tal que as distâncias deste ponto aos limites da classe sejam inversamente proporcionais às frequências

Assim :

$$mo = li + \frac{fpost}{fant + fpost} \cdot i \quad (33)$$

onde :

li = limite inicial da classe modal
fpost = frequência simples posterior à classe modal
fant = frequência simples anterior à classe modal
i = intervalo de classe

Esta fórmula tem o inconveniente de não levar em conta a frequência da classe modal.

4.2. Cálculo da moda pelo processo de CZUBER

No processo de CZUBER considera-se, além das influências das frequências adjacentes, a influência também da frequência modal. O ponto correspondente à moda divide o intervalo em partes proporcionais às diferenças da frequência da classe modal com as adjacentes anterior e posterior, respectivamente .

Assim, pelo processo de CZUBER, teremos :

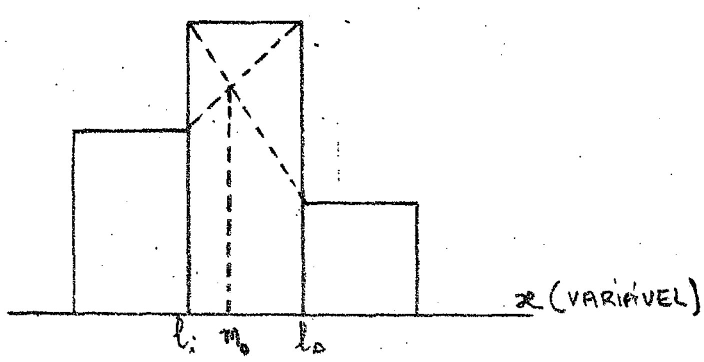
$$mo = li + \frac{(fmax - fant)}{2\ fmax - (fant + fpost)} \cdot i \quad (34)$$

/.

onde

li = limite inicial de classe
fmax = frequência modal
fant = frequência simples anterior
fpost = frequência simples posterior
i = intervalo de classe

Ou por um processo gráfico, utilizando-se as 3 classes de frequências, que à moda de KING interessam : a classe de frequência modal e as duas adjacentes.



Exemplo 10

Calcular a moda, pelos processos de King e de CZUBER, da distribuição abaixo :

X	fi
0 - 4	2
4 - 8	4
8 - 12	7
12 - 16	16
16 - 20	26
20 - 24	12
24 - 28	6
28 - 32	2
$\sum f$	75

a) Aplicando a fórmula de King

$$mo = li + \frac{fpost}{fant + fpost} \cdot i$$

$$mo = 16 + \frac{12}{12 + 16} \cdot 4$$

$$mo = 17,71$$

b) Aplicando a fórmula de CZUBER

$$mo = li + \frac{(fmax - fant)}{2\ fmax - (fant - fpost)} \cdot i$$

donde :

$$mo = 16 + \frac{(26 - 16)\ 4}{2 \times 26 - (16 + 12)}$$

$$mo = 17{,}67$$

5. <u>Emprêgo das diversas medidas de tendência central</u>

Muito frequentemente ficamos indecisos ao decidir qual a medida de tendência central mais adequada a determinado problema. Em geral, preferimos a média aos demais promédios, por ser rigorosamente definida em têrmos matemáticos e basear-se em tôdas as medidas.

Podemos, no entanto, estabelecer certas regras gerais para o uso da média, da mediana e da moda.

Vale esclarecer que em uma distribuição de frequência rigorosamente simétrica, a média aritmética, a mediana e a moda tem o mesmo valor; e que, nas distribuições não muito assimétricas, a relação existente entre as três medidas é a seguinte :

$$\bar{x} = \frac{3\ md - mo}{2} \qquad (35)$$

ou como está expressa na fórmula 32

A fórmula 32 é mais conhecida como a relação de Pearson .

5.1. Emprêgo da média

a) Quando os resultados se distribuem simètricamente em tôrno de um ponto central, isto é, quando a distribuição de frequência se apresentar de forma não muito simétrica. Neste caso a média é, por assim dizer, o centro de gravidade da distribuição e cada resultado contribui para sua determinação .

b) Quando desejamos obter a medida de tendência central que possui a maior estabilidade. A média é mais estável que a mediana ou a moda (veremos mais adiante o por que disto, quando estudarmos a significância da média e de outras medidas estatísticas).

c) Quando fôr necessário computar, posteriormente, outras estatísticas (por exemplo, desvio - padrão, coeficiente de correlação).

5.2. Emprêgo de mediana

b) Quando há resultados extremos que afetariam de maneira acentuada a média, mas que não afetam a mediana.

c) Quando desejamos fazer com que certos resultados influam sôbre a tendência central,sabendo apenas que se situam abaixo ou acima da mediana.

5,3. <u>Emprêgo da moda</u>

a) Quando desejamos obter apenas uma medida rápida e aproximada da tendência central.

b) Quando a medida da tendência central deva ser o valor mais típico (Quando descrevemos o estilo de um vestido ou do calçado usado pela <u>mulher média</u>, por exemplo,fazemos geralmente referência ao valor modal ou mais popular : do mesmo modo, quando falamos do salário predominante em uma indústria, fazemos geralmente referência ao salário modal em determinadas condições .

FAG/drc

APÊNDICE

Teoria dos êrros e a significação dos números

1. Elementos de teoria dos êrros

Não estamos intentando aqui, expor a teoria dos êrros, face ser impossível aprofundá-la em poucas páginas. Entretanto, para se trabalhar com números, é sempre importante precisar o que queremos exprimir ao quantificar alguma coisa.

1.1 Números exatos e aproximados. Precisão das medidas .

Quando, numa determinada sala de aula, fazemos a contagem dos alunos nela existentes, o resultado obtido é um número exato. Entretanto, se fazemos a medição de determinado objeto jamais, por mais cuidados que se tenha, teremos um resultado absolutamente exato .

Como a maioria dos números utilizados em trabalhos técnicos-científicos, são resultados de medidas realizadas com os mais diversos instrumentos, podemos assegurar que duas pessoas lerão o mesmo instrumento de duas maneiras distintas, ou mesmo que uma única pessoa poderá ler o referido instrumento diferentemente, em duas ocasiões distintas.

Há balanças que permitem pesar determinado volume com uma aproximação de 0,5 kg, existindo outras com uma aproximação de até um miligrama. Daí, concluímos que a mais perfeita das balanças é a que possui um maior limite de precisão .

Assim sendo, verificamos sempre uma diferença entre o valor real e o encontrado. Encontramos, assim, sempre um êrro.

2. Êrros

2.1. Êrros acidentais e êrros sistemáticos

Os êrros de mensuração podem ser de duas espécies : acidentais e sistemáticos .

Se um número bastante grande de pessoas efetuam uma medida com uma régua de 50 cm, fatalmente, não fornecerão a mesma resposta. Algumas farão a medição encontrando um valor maior, enquanto outros encontrarão um valor menor. Tais êrros, denominados ACIDENTAIS ou CASUAIS tendem a se compensar uns aos outros. Se realizamos um grande número de mensurações, os êrros desaparecerão com a média. Surgem por simples acaso, daí serem chamados CASUAIS .

Entretanto , se forem feitas n medições com uma régua que se apresente com 100 cm, mas que na realidade só possua 90, tôdas as medidas terão êrros, sempre na mesma direção, face a instrumentos mal construídos ou mal ajustados. Denominamos tais êrros de SISTEMÁTICOS, CONSTANTES ou PERSISTENTES .

Nem sempre, os êrros sistemáticos acontecem por deficiência do instrumento. Ocorre frequentemente defeito de leituras, cometido sistemàticamente numa mesma direção .

2.2 Êrro real e êrro absoluto

Quando lidamos com êrros, deparamos com duas categorias : êrro real e êrro absoluto . Tomemos um exemplo : seja M o valor exato de uma grandeza e m, o seu valor aproximado, obtido através de uma medida .

O Êrro Real desta medida será fornecido por

$$ER = M - m$$

Podemos dizer que m é um valor aproximado de M, por excesso ou por escassez, conforme ER seja, respectivamente, positivo ou negativo.

Normalmente, costumamos trabalhar com Êrro absoluto, Ea, ou simplesmente Êrro, nada mais que o valor absoluto do Êrro Re Assim :

$$Ea = |ER| = |M - m|$$

Como geralmente o valor exato da medida é desconhecido, tomamos para valor exato da grandeza, o seu valor provável Mp, média aritmética de n medidas efetuadas, isto é :

$$M = Mp = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} mi$$

2.3. Êrro relativo e Êrro percentual

Consideramos como Êrro Relativo de uma medida, como sendo a razão entre o êrro absoluto da medida Ea e o valor exato da grandeza. Assim :

$$Er = \frac{Ea}{M}$$

Como M é geralmente desconhecido, é sempre representado pela média dos n medidas realizadas ; temos então

$$Er = \frac{Ea}{Mp}$$

Deve ser lembrado que é o êrro relativo e não o absoluto que caracteriza a qualidade de uma medida .

Tomando-se o Êrro relativo e multiplicando-se por 100, obtemos o Êrro percentual .

Assim, o Êrro percentual será igual a

$$Ep = 100.Er$$

Devemos logo dizer que o êrro relativo, sendo uma relação entre grandezas da mesma espécie, é um número puro, portanto adimensional.

Com base neste fato, podemos comparar as qualidades de medidas de grandezas diferentes, mesmo quando de natureza distintas.

2.4. Êrro absoluto Médio, Êrro Quadrático e Êrro Tolerável.

Podemos dizer que o Êrro Absoluto Médio de um conjunto de n medidas é a média aritmética dos Êrros absolutos cometidos .

$$\bar{Ea} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ea_i$$

Já o Êrro Médio Quadrático de um conjunto de n medidas realizadas é calculado pela raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos êrros absolutos cometidos ;

$$Eq = \pm\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ea_i^2}$$

Entendemos por Êrro Tolerável o triplo do Êrro Médio Quadrático. Assim, denominado o Êrro Tolerável de Et= 3 Eq

Na prática, desprezamos aquelas medidas cujos êrros absolutos forem maiores que o êrro Tolerável .

Tomemos um exemplo.

Seja a tabela abaixo, representativa de uma série de medidas realizadas num determinado objeto .

X_i	ER	E a	Ea^2
23,4	- 0,1	0,1	0,01
23,8	0,3	0,3	0,09
23,2	- 0,3	0,3	0,09
23,7	0,2	0,2	0,04
23,2	- 0,3	0,3	0,09
23,6	0,1	0,1	0,01
23,9	0,4	0,1	0,16
			0,49

Calculando o valor provável Mp das medidas efetuadas, obtemos :

$$Mp = \frac{23,4 + 23,8 + 23,2 + 23,7 + 23,2 + 23,6 + 23,9}{7}$$

donde

$$Mp = \frac{164,8}{7} = 23,5$$

Dai obteremos um êrro médio quadrático igual a

$$\overline{Eq} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ea^2{}_i}$$

donde

$$Eq = \sqrt{\frac{0,49}{7}} = \sqrt{0,0700} = \pm\ 0,26$$

Assim sendo, o êrro tolerável Et será igual a

$$Et = 3\left|\overline{Eq}\right| \therefore \ Et = 3 \times 0,26 \therefore \ Et = 0,78$$

Como todos os êrros absolutos são inferiores ao êrro tolerável, nenhuma medida necessita ser desprezada .

II - A significação dos Números

1. Introdução

Suponhamos que, ao mensurarmos um indivíduo quanto à altura, com uma fita métrica, obtenhamos resultado qualquer, digamos, 135 cm.

Sabèmos que esta medida não é exata, mas aproximada.

Podemos dizer que a altura da pessoa possui um valor compreendido entre 134,5 e 135,5 cm. Isto quer dizer que quando adotamos para a altura daquele indivíduo, o valor 135 cm., está dotado de um êrro absoluto menor ou no máximo igual a 0,5 cm. A altura do indivíduo poderia ter os seguintes valores possíveis :

135

134,5 135,5

Nestas condições, dizemos que 135cm exprime o valor da altura de um indivíduo, com todos os seus algarismos significativos .

<u>Assim, um número aproximado possui todos os seus algarísmos significativos, se o êrro de que está possuido é menor ou no máximo igual à metade da unidade da última ordem das que constituem o número</u> .

Sendo mais preciso, poderemos dizer que:

1. Todos os digitos, exceto os ZEROS, são sempre significativos.

2. Os ZEROS também são significativos, salvo :

   a) quando colocados na extremidade direita de um número e à esquerda da vírgula.

   b) quando colocado na extremidade esquerda de um número

Exemplos :

32 056 ⟶ 5 algarísmos significativos
230,00 ⟶ 5 algarísmos significativos
186 000 ⟶ 3 algarísmos significativos
0,003 ⟶ 1 algarísmo significativo

2. <u>Notação - padrão</u>

Para indicar o número de algarísmos significati - vos que possui uma determinada medida, podemos usar uma notação-padrão. Sendo nosso sistema de numeracão decimal, fácil se torna expressar qualquer número em potência de 10.

Um número escrito sob notação-padrão, "<u>consiste em um digito seguido da vírgula decimal e de tantos outros digi-</u>

tos quantos forem significativos, multiplicados pela potência de 10 necessária para indicar a colocação da vírgula em seu verdadeiro lugar".

Assim :

Número	Algarismos significativos	Notação-padrão
0,0075	2	$7,5 \times 10^{-3}$
517	3	$5,17 \times 10^{-2}$
7,425	4	$7,425 \times 10^{0}$
72,34	4	$7,234 \times 10º$
200	1	2×10^{2}
20	1	2×10
210	2	$2,1 \times 10^{2}$
217,352	6	$2,17352 \times 10^{2}$

2.5.5. Operações com Algarismos Significativos

Quando aprendemos a efetuar as quatro operações aritméticas - adição, subtração, multiplicação e divisão - presumimos que estamos utilizando números puros, números exatamente precisos e que significam exatamente o que demonstravam exprimir. Entretanto quando os números são meras aproximações, como geralmente acontece, aquelas regras provàvelmente nos levarão a conclusões falaciosas. Se fosse dividido 17 por 3 acharíamos 5,3333 .... , e indefinidamente poderíamos ir colocando 3 à direita da vírgula . Poderíamos pensar que o número de algarismos 3 colocados à direi ta da vírgula indicaria uma maior precisão, quando na realidade a quantidade de 3 não significa coisa alguma. Consequentemente, deduzimos que temos a necessidade da aplicação de novos métodos nas operações aritméticas dos números aproximados .

2.5.5.1. MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Albert Waugh tem uma regra bastante prática para a multiplicação e divisão de números aproximados. Ei-la :

"Para multiplicar ou dividir números aproximados, usam-se as seguintes regras :

a) Arrendondamos os números de modo a conservar-lhes tantos algarísmos significativos - mais um -, quantos tenha o de menor número de algarísmos significativos com que se vai operar.

b) Multiplicamos ou dividimos os números arrendondados, como habitualmente .

c) Arrendondamos a resposta (produto ou quociente) de modo a só conservar-lhe tantos algarísmos significativos quantos tenha o de menor número de algarísmos significativos com que se operou".

EXEMPLOS

1. Calcular

3,15 x 4,72871

Arrendondando o maior para tantos algarísmos mais um do que o menor número de algarísmos, temos :

3,15 x 4,73 = 14,8995

Arredondando finalmente, temos

$$3,15 \times 4,73 = 14,9 \text{ ou } 1,49 \times 10$$

2. Efetuar;

72×36

Temos que

$72 \times 36 = 2592$

Arredondando na notacão padrão,

$2,6 \times 10^2$

3. Efetuar;

$45,3 \div 8,2935867$

Tomamos

$45,3 \div 8,294$

Donde

$45,3 \div 8,294 = \underline{5,46}$

2.5.5.2. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

O mesmo WAUGH dá também as regras para efetuarmos as operações de adição e subtração com os algarismos significativos. Ei-las :

a) Dispomos os números depois de reduzidos à mesma unidade, de modo que a vírgula se coloque numa mesma coluna vertical ;

b) Verificamos qual dos números tem maior quantidade de algarismos não significativos à - esquerda ;

c) Arredondamos todos os outros números para a unidade assim determinada mais uma ;

d) Somamos ou subtraímos os números arredondados, pelos processos usuais .

e) Arredondamos a resposta até a coluna que - corresponda ao último algarismo significativo, no número que serviu de base ao arredondamento das parcelas".

Ex: Somar 250 000 + 19 123 606 + 19 166 837

Na primeira parcela apenas dois algarismos significativos. Colocando todos sob a coluna da vírgula, obtemos:

$$\begin{array}{r} 250\ 000 \\ 19\ 123\ 606 \\ 19\ 166\ 837 \end{array}$$

Aplicando a regra vem

$$\begin{array}{r} 250\ 000 \\ 19\ 124\ 000 \\ \underline{19\ 167\ 000} \\ 38\ 541\ 000 \end{array}$$

Arredondando finalmente ,

Exemplo

Efetuar

19 123 606 - 250 000

Ao invés de

19 123 606
250 000

ficaria

19 124 000
250 000
18 874 000

e, arredondando finalmente

18 870 000

III - ARREDONDAMENTO DE NÚMEROS

Sempre que fôr necessário arredondar um dado estatístico, será adotada a seguinte regra : quando o primeiro algarismo a ser desprezado fôr 0, 1, 2, 3, ou 4, deve ser sumàriamente abandonado (arredondamento por falta) ; quando, porém, fôr 6,7,8 ou 9, o último algarismo a permanecer será aumentado de uma unidade (arredondamento por excesso). Quando o primeiro algarismo a ser desprezado fôr 5 adotamos o seguinte : se a última unidade a ser conservada é par, permanão se arredondando. Se impar, sofre arredondamento .

Ex:

13,74 - para inteiros 14

1 904,25 - para décimos 1 904,2

74,6% - para inteiros 75%

22,3% - para inteiros 22%

Em caso de soma, arredondaremos primeiro, o total e, depois, as parcelas :

a) se a soma das parcelas fôr superior ao total na série arredondada, voltaremos à série original para deixar de arredondar (por excesso) tantas parcelas - quantas forem unidades excedentes; dentre essas parcelas serão escolhidas aquelas cujas frações desprezadas formam um número que mais se aproxime, conforme o caso, de 5, 50, 500, etc.

Exemplo :

Série Original	Arredondamento	Ajustamento
22,52	23	22
6,00	6	6
18,51	19	18
9,65	10	10
12,53	13	12
3,80	4	4
10,64	11	11
7,60	8	8
3,11	3	3
5,61	6	6
[illegible]	[illegible]	

b) se a soma das parcelas fôr inferior ao total na série arredondada, voltaremos à série original para arredondar por excesso tantas parcelas quantas forem - as unidades em falta ; dentre essas serão escolhidas aquelas, ainda não arredondadas, cujas frações desprezadas formem um número que mais se aproxime, conforme o caso, de 5, 50, 500, etc.

Série Original	Arredondamento	Ajustamento
77,470	77	78
14,100	14	14
185,300	185	185
13,800	14	14
121,250	121	121
145,200	145	145
29,200	29	29
92,420	92	93
50,390	50	50
89,500	90	90
818,630	817 < 819	819

Nos casos em que sejam adotados critérios de arredondamento diferentes dos estabelecidos acima, deverão tais critérios constar em notas justificativas no rodapé da tabela.

Em caso da existência de subtotais, procedemos ao arredondamento dos mesmos à base do total geral e o dos valores simples à base dos subtotais .

Devem ser evitados arredondamentos suces - sivos, sendo recomendada à volta aos dados originais caso se proceda a nôvo arredondamento .

Ex: 17,444 ⟶ 17,4 ou ⟶ 17; e nunca assim :

17,445 ⟶ 17,45 ⟶ 17,5 ⟶ 18

IV - MODO DE ESCREVER OS NÚMEROS E OS SÍMBOLOS

Quando escrevemos um número ou símbolo de alguma medida, segue-se as seguintes regras :

a) as unidades de medida, seus múltiplos e sub-múltiplos, devem ser designados pelos nomes exatos incluídos na lei metrológica nacional, o nome da unidade pode ser substituído pelo respectivo símbolo .

b) a vírgula será empregada exclusivamente para separar a parte decimal da parte inteira dos números ;

c) os números de mais de três algarísmos - (com exceção dos indicativos dos anos do calendário) devem ser separados por pontos em grupos de três algarísmos; a parte inteira, da direita para a esquerda, a parte das unidades; e a parte decimal, da esquerda para a direita, a partir da vírgula ;

d) não será acrescentada a letra "s" a um símbolo, em sinal do plural ;

e) quando o símbolo se relaciona a um número decimal, não será intercalado entre a parte inteira e a parte decimal, aparecendo imediatamente à direita desta ; não aplicamos esta regra precedente quando a divisão não é decimal;

f) não usamos o ponto após o símbolo ;

g) o uso de algarismos romanos deve ser evitado, inclusive em dados ;

h) os símbolos serão escritos na mesma linha dos números, e não em forma de expoente; excetuamos, apenas, as unidades sexagesimais de ângulo .

FAG/drc

APOSTILA DE MATEMÁTICA

Paulo Gonçalves dos Santos

II PARTE

MATRIZES E DETERMINANTES

RECIFE
1972

1.1 Definições e notações

<u>Matriz sôbre um corpo K</u> é um conjunto ordenado de elementos de K, dispostos em linhas e colunas num quadro retangular e para o qual foram definidas a igualdade, adição e multiplicação por um escalar. Êsse corpo K é um conjunto de elementos fechado sob as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (a excesso da divisão por zero), constituindo o conjunto dos reais um excelente modêlo.

Assim, pode-se ter matrizes sôbre o corpo dos reais quando os seus elementos forem números reais, matrizes sôbre o corpo dos complexos quando os seus elementos forem números complexos, etc...

Uma maneira usual de se representar uma matriz é aquela em que os elementos, representados por uma mesma letra com - dois índices indicativos de sua posição, são dispostos em um quadro retangular colocado entre dois colchetes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Abreviadamente, a matriz pode tambem ser representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

a_{ij} representa o elemento que se encontra na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Costuma-se chamar "entrada" ao elemento genérico de uma matriz.

A ordem ou tipo de uma matriz é dada dizendo primeiro o número de linhas e, em seguida, o número de colunas. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é de ordem 2 x 3, tipo 2 x 3 ou ainda, simplesmente matriz 2 x 3.

Para as matrizes quadradas, isto é, quando m=n, diz-se simples

mente matriz de ordem n.
Diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos $a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$ com índices iguais.

Igualdade de matrizes - Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são iguais, e escreve-se $A = B$, se e sòmente se têm a mesma ordem e cada elemento de uma delas é igual ao elemento correspondente da outra.

Em duas matrizes iguais os elementos que ocupam posições iguais são iguais $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots m;\ j = 1,2,\ldots n)$.
É fácil mostrar que as propriedades usuais da igualdade de números se verificam anàlogamente para as matrizes. Assim, $A = A$ (reflexiva). Se $A=B$, então $B=A$ (simétrica). Tambem se $A=B$ e $B=C$, então $A=C$ (transitiva).

A igualdade de matrizes é portanto, uma relação de equivalência.

1.2 Alguns tipos de matrizes

Matriz linha ou vetor linha é uma matriz 1 x n, isto é, formada por uma única linha. Ex: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Anàlogamente, matriz de uma coluna ou vetor coluna é uma matriz n x 1, isto é, formada por uma única coluna.

Matriz nula é aquela cujos elementos são todos nulos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} i & -1-i & -2 \\ 1-i & 3i & i \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{A}^t = \begin{bmatrix} -i & -i+1 & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\bar{A}^t = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ é anti hermítica desde que $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ para quaisquer valores de i e j. Para os elementos pertencentes a diagonal principal $i = j$, donde $a_{ii} = -\bar{a}_{ii}$. Quando um número complexo é igual ao negativo do seu conjugado, êle reduz-se a um imaginário puro $\alpha + \beta i = -(\alpha - i)$.'. .'. $\alpha = 0$.

Portanto:

Na matriz anti hermítica os elementos da diagonal principal são imaginários puros e os elementos simétricos em relação a diagonal principal são complexos conjugados e de sinais contrários.

Exemplos de matrizes anti hermíticas:

$$\begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3+2i & -4 \\ 3+2i & 3i & -2+i \\ 4 & 2+i & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5+i & 1+2i \\ 5+i & 0 & 3i \\ -1+2i & 3i & 0 \end{bmatrix}$$

O quadro seguinte permite comparar propriedade de quatro tipos importantes de matrizes:

Tipo de matriz	Elementos simétricos em relação à diag. princ.	Elementos que formam a diagonal principal
Simétrica	$a_{ij} = a_{ji}$	números quaisquer
Anti-simétrica	$a_{ij} = -a_{ji}$	nulos
Hermítica	$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$	números reais
Anti-hermítica	$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$	imaginários puros

1.3 Adição de matrizes

É uma operação que só se define para matrizes do mesmo tipo. A matriz soma é, por definição, a matriz cujos elementos são iguais a soma dos elementos homólogos das matrizes parcelas. Sejam A e B duas matrizes do tipo m x n

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdot & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{bmatrix} \quad A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz soma das matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ que se representa por $S = A + B = [s_{ij}]$ é uma matriz do tipo m x n, tal que o seu elemento genérico é igual à soma dos elementos genéricos de igual posição das matrizes parcelas.

$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ quaisquer que sejam os valores dos índices i e j dentro dos seus respectivos domínios)i = 1,2,...m; j = =1,2,...n).

De acôrdo com a definição, só se pode somar duas matrizes se elas forem da mesma ordem e duas matrizes de mesma ordem são ditas "confôrmes" para a adição

Propriedades da adição de matrizes

Seja S o conjunto de tôdas as matrizes sôbre o corpo K, do tipo m x n, com m e n fixos.

A1) Se A e B são elementos de S, então A + B também é um elemento de S.

$$A + B \in S \quad \forall A, B \in S$$

A2) Existe a matriz nula de S, designada por O, também denominada elemento neutro em relação à adição.

$$\exists\, O \in S ; \quad A + O = O + A = A \quad \forall A \in S$$

A3) A adição de matrizes é uma operação comutativa.

$$A + B = B + A \quad \forall A, B \in S$$

A4) A adição de matrizes é uma operação associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A,B,C \in S$$

A5) Para todo elemento A do conjunto S, existe o inverso aditivo (-A) que é a matriz oposta de A tal que A +(-A) = O

$$\exists\, (-A) \in S; \quad A + (-A) = O \quad \forall A \in S$$

1.4 Produto de um número real por uma matriz

Dada uma matriz A do tipo m x n e um número real c, o produto cA ou Ac é uma matriz B do tipo m x n tal que o elemento b_{ij}

da i-ésima linha e j-ésima coluna é igual ao produto $c.a_{ij}$ do número c pelo elemento a_{ij} da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

Em outras palavras, o produto c.A do escalar c pela matriz A é a nova matriz cujos elementos são c vezes os elementos correspondentes de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad c.A = \begin{bmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} & \dots & c.a_{1n} \\ c.a_{21} & c.a_{22} & \dots & c.a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c.a_{m1} & c.a_{m2} & \dots & c.a_{mn} \end{bmatrix}$$

Propriedades do produto de um número real por uma matriz

Sendo S o conjunto de tôdas as matrizes sôbre o corpo K, do tipo m x n, com m e n fixos, se A e B são elementos de S e se α e β são números reais, tem-se:

M1) O produto de um número real por um elemento qualquer de S é tambem um elemento de S.

$$\alpha A \in S \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall A \in S$$

M2) A multiplicação de um número real por matrizes é distributiva em relação à adição de matrizes

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall A, B \in S$$

M3) A multiplicação de números reais por uma matriz é distributiva em relação à adição de números.

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad \forall A \in S$$

M4) A multiplicação de números reais por uma matriz é associativa em relação aos números reais.

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall A \in S$$

M5) Existe o elemento neutro em relação ao produto de um número real por uma matriz.

$$1.A = A \qquad A \qquad S$$

1.5 O espaço vetorial das matrizes m x n.

O conjunto S das matrizes m x n sobre o corpo K, para o qual foram definidas as operações de adição de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz e que satisfaz as propriedades A1, ...A5, M1, ... M5, constitue um espaço vetorial sobre o corpo K em que cada vetor é uma matriz.

1.6 Multiplicação de duas matrizes

Antes de definir o produto de duas matrizes serão apresentados alguns conceitos introdutórios.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ respectivamente, um vettr linha e um vetor coluna pertencentes ao espaço tridimensional. Seu produto escalar é igual à soma dos produtos das componentes homônimas e pode ser obtido combinando as matrizes assim:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{bmatrix}$$

Êste artifício permite definir o produto "linha por coluna" que se designa abreviadamente por LICO

"Cada elemento da matriz linha é multiplicado pelo seu correspondente da matriz coluna e os produtos são somados"

A convenção introduzida, pode ser aplicada a equação

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = y_1$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \end{bmatrix}$$

De modo análogo, a equação $b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = y_2$ escreve-se:

$$\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \end{bmatrix}$$

Associando os dois últimos resultados, pode-se escrever sob a forma de produto de matrizes o sistema de duas equações:

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3=y_1 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3=y_2 \end{cases} \quad (1) \quad \underset{(B)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}} \underset{(X)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{(Y)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \text{ ou } BX=Y$$

Com esta associação, foi introduzida uma nova convenção: o pro duto da matriz B pela matriz X é feito multiplicando-se os elementos que formam as linhas da matriz B pelos seus correspondentes da matriz coluna X e os resultados obtidos vão constituir as linhas da matriz coluna Y.

Da mesma maneira, pode-se escrever o seguinte sistema sob forma de um produto de matrizes:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = z_2 \end{cases} \quad (2) \quad \underset{(A)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(Y)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} = \underset{(Z)}{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}} \text{ ou } A\ Y = Z$$

Substituindo no último sistema os valores de y_1 e y_2 e reagrupando vem:

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23})x_3 = z_1 \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23})x_3 = z_2 \end{cases}$$

Escrevendo sob forma matricial:

$$\underset{(P)}{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{bmatrix}} \underset{(X)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{(Z)}{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}$$

Das igualdades B X=Y e A Y=Z deduz-se A B X = Z ou (AB)X=Z que comparada com a igualdade P X=Z permite escrever P= A B, isto é, a matriz

A multiplicada pela matriz B produz a matriz P :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} & a_{11}\,b_{13} + a_{12}\,b_{23} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} & a_{21}\,b_{13} + a_{22}\,b_{23} \end{bmatrix}$$

Afim de que essas computações sejam feitas de uma maneira genérica deve ser atendido o pré requesito fundamental de que os números de y_i em (1) e em (2) devem ser o mesmo. Isto equivale a dizer que o número de colunas da matriz A deve ser igual ao número de linhas da matriz B.
Feitas as introduções acima, pode-se agora definir, formalmente, multiplicação de duas matrizes.

1.6 Multiplicação de matrizes

Definição - Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ do tipo m x n e uma matriz $B = \left[b_{jk}\right]$ do tipo n x p, isto é, dadas duas matrizes A e B em que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, chama-se produto da matriz A pela matriz B, nessa ordem, que se indica por AB, à matriz $C = \left[c_{ik}\right]$ do tipo m x p cuja entrada c_{ik} é igual ao produto interno da i ésima linha de A pela k-ésima coluna de B.

$$c_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

O elemento c_{ik} da i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz produto, é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da k-ésima coluna de B.

Conforme a definição, o produto da matriz A pela matriz B só é definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Quando isso ocorre, diz-se que as matrizes A e B são "conformes".

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

O produto AB é

$$AB = \begin{bmatrix} 1(2)+3(1)+1(3) & 1(1)+3(-1)+1(2) & 1(0)+3(2)+(1)(1) \\ 2(2)+9(1)+4(3) & 2(1)+0(-1)+4(2) & 2(0)+0(2)+4(1) \\ 1(2)+2(1)+3(3) & 1(1)+2(-1)+3(2) & 1(0)+2(2)+3(1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Na multiplicação de matrizes é fundamental a seguinte observação:

"Duas matrizes só podem ser multiplicadas quando o número de colunas da primeira fôr igual ao número de linhas da segunda, e o número de linhas da matriz produto é igual ao número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da matriz produto é igual ao número de colunas da matriz produto é igual ao número de colunas da segunda matriz".

Casos particulares da multiplicação de duas matrizes:

I) Um "vetor linha" vezes uma "matriz" é igual à um "vetor linha"

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 7 & 15 & 13 \end{bmatrix}$$

II) Uma "matriz" vezes um "vetor coluna" é igual à um "vetor coluna"

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

III) Um "vetor linha" vezes um "vetor coluna" é igual à uma matriz 1 por 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}$$

IV) Um "vetor coluna n x 1 "vezes um "vetor linha 1 x n" é igual à uma"matriz n x n"

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Na multiplicação de matrizes não se pode falar em propriedade comutativa, pois quando se pode multiplicar a matriz A pela matriz B, em geral não se pode multiplicar B por A; e mesmo que existam ambos os produtos e sejam do mesmo tipo, tem - se em geral $A\,B \neq B\,A$.

Quando ocorre $A\ B = B\ A$, as matrizes A e B dizem-se comutá - veis ou permutáveis.
É o que acontece, por exemplo, sempre que A e B sejam matri - zes diagonais de mesma ordem.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

1.8 Potências inteiras positivas de matrizes; polinômios de matrizes.

Uma matriz quadrada pode ser multiplicada m vezes por e la mesma, a matriz resultante dessas m operações é chamada "potência de grau m da matriz"

Seja A uma matriz quadrada do tipo $n \times n$; seja I a matriz i dentidade $n \times n$ e m um número inteiro não negativo. Por defi- nição tem-se:

$$A^o = I \quad e \quad A^m = A.A.\ldots.A(\text{produto de } m \text{ fatores iguais a } A)$$

Dado o polinômio qualquer em x $f(x)=a_n\ x^n + a_{n-1}\ z^{n-1}+\ldots+a_o$

e a matriz quadrada A de ordem $n \times n$, por definição, tem-se:

$f(A)= a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_o$ em que $a_n, a_{n-1}\ldots a_o$ são escalares.

Exercício:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ então } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$$

Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ então

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

Se $g(x) = x^2 + 3x - 10$ então

$$g(A) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

isto é, a matriz A é um zero do polinômio $g(x)$.

oOoOoOoOoOo

Vejamos agora dois casos particulares de multiplicação de matrizes que surgem frequentemente na prática:

1º Caso: O produto de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são os produtos dos elementos de igual posição das matrizes dadas.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & 0 & 0 \\ 0 & bb_1 & 0 \\ 0 & 0 & cc_1 \end{bmatrix}$$

2º Caso: Sendo D a matriz diagonal de ordem $\underline{n}$ com os elementos K_i na íesima linha e íesima coluna, e A uma matriz quadrada de ordem n o produto DA é a matriz obtida de A multiplicando-se a íesima linha de A por K_i $(i = 1,2,\ldots n)$

$$DA = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1a_{11} & K_1a_{12} & K_1a_{13} \\ K_2a_{21} & K_2a_{22} & K_2a_{23} \\ K_3a_{31} & K_3a_{32} & K_3a_{33} \end{bmatrix}$$

"O produto AD é a matriz obtida de A multiplicando-se a i ésima coluna de A por K_i (i = 1,2, . . . , n)"

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1a_{11} & K_2a_{12} & K_3a_{13} \\ K_1a_{21} & K_2a_{22} & K_3a_{23} \\ K_1a_{31} & K_2a_{32} & K_3a_{33} \end{bmatrix}$$

1.9 Propriedades da multiplicação de matrizes

Admitindo-se que A, B, C são matrizes conformes para as somas e produtos indicados tem-se:

a) A(B + C) = A B + A C (lei da distributividade à esquerda)

b) (B + C)A = B A + C A (lei da distributividade à direita)

c) A(B C) = (AB)C (lei associativa)

A lei comutativa, em geral, não é verificada, como também o produto de duas matrizes pode ser uma matriz nula sem que nenhum dos fatôres seja uma matriz nula e ainda a chamada lei do cancelamento para a multiplicação de números reais, em geral, não é verificada. Assim, pode-se escrever:

d) $AB \neq BA$ em geral

e) AB = O não implica necessàriamente ser A = O ou B = O

f) AB = AC não implica necessàriamente ser B = C.

Vale ressaltar que o produto de duas matrizes é sempre igual à matriz nula quando uma das matrizes é a matriz nula, isto é, OA = AO = O em que O é a matriz nula.

A verificação das propriedades (a) e (b) são feitas de modo análogo. Vejamos a verificação da propriedade (a).

Sejam A uma matriz do tipo $m \times p$, B e C matrizes do tipo $p \times n$. Representemos o produto AB por S e o produto AC por T que são matrizes do tipo $m \times n$.

$A = [a_{ij}]$ tipo $m \times p$ $\quad S = AB = [s_{ik}]$ tipo $m \times n$

$B = [b_{jk}]$ tipo $p \times n$ $\quad T = AC = [t_{ik}]$ tipo $m \times n$

$C = [c_{jk}]$ tipo $p \times n$ $\quad D = B + C = [d_{jk}]$ tipo $p \times n$

Os elementos genéricos das matrizes D, S e T escrevem-se:

$$d_{jk} = b_{jk} + c_{jk}\ , \quad s_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}, \quad t_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, c_{jk}$$

O elemento da iésima linha e késima coluna da matriz AB + AC é:

$$s_{ik} + t_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk} + \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, c_{jk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

Por outro lado, o elemento da i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz $AD = A(B + C)$ é:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} d_{jk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, (b_{jk} + c_{jk})$$

Comparando os resultados obtidos, conclue-se que $A(B+C)=AB+AC$

Vejamos agora a verificação da lei associativa.

Sejam A,B,C matrizes do tipo $m \times p$, $p \times n$ e $n \times q$ respectivamente. Representemos o produto AB por S e o produto BC por T que são matrizes do tipo $m \times n$ e $p \times q$.

$A = [a_{ij}]$ tipo $m \times p$ $\quad S = AB = [s_{ik}]$ tipo $m \times n$

$B = [b_{jk}]$ tipo $p \times n$ $\quad T = BC = [t_{jl}]$ tipo $p \times q$

$C = [c_{kl}]$ tipo $n \times q$

Uma vez que AB é uma matriz do tipo m x n e BC é uma matriz do tipo p x q, pode-se multiplicar (AB) por C e multiplicar A por (BC).

Os elementos genéricos das matrizes S e T escrevem-se:

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}$$

$$t_{jl} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \dots + b_{jn}c_{nl}$$

Multiplicando S por C, isto é, (AB) por C, o elemento da i-é sima linha e l-ésima coluna é:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik}c_{kl} = s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + \dots + s_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

Por outro lado, multiplicando A por T, isto é, A por BC, o e lemento da i-ésima linha e l-ésima coluna é:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, t_{jl} = a_{i1}t_{1l} + a_{i2}t_{2l} + \dots + a_{ip}t_{pl} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

Sendo os somatórios iguais, a propriedade está verificada.

(Exercícios sôbre as propriedades da multiplicação de matri - zes)

1) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mostrar que $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$ e $A(BC) = (AB)\,C$

2) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Verifique que $AB = 0$ e $BA \neq 0$, portanto $AB \neq BA$

3) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que $AB = AC$. Portanto, sendo $AB = AC$ não se pode concluir ser $B = C$.

4) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Mostre que $AB = BA$

5) Se A é a matriz do problema anterior, calcule A^2, A^3 e A^{57}

Resp $A^{57} = \begin{bmatrix} \cos 57\theta & -\operatorname{sen} 57\theta \\ \operatorname{sen} 57\theta & \cos 57\theta \end{bmatrix}$

6) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ Calcular A^2, A^4 e A^8

Respostas: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ determinar uma matriz quadrada X de ordem 2 tal que $AX = I$

Resp. $X= \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

1.10 <u>Matrizes especiais</u>

Matriz unidade ou matriz identidade para a multiplicação.

Já se definiu matriz identidade como a matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é, o elemento genérico da matriz que é δ_{ij} é igual a 1 para $i = j$ e igual a 0 para $i \neq j$.

Propriedades das matrizes unidade

1) Tôda matriz unidade que pré-multiplica (quando a multiplicação é possível) uma matriz dá como produto a matriz considerada.
   Seja A uma matriz do tipo m x n e seja I_m a matriz unidade de ordem m, tem-se: $I_m A = A$. Com efeito, o elemento da i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz produto $I_m A$ é a soma dos produtos
   $$\delta_{i1} a_{1k} + \delta_{i2}a_{2k} + \dots + \delta_{i1} a_{ik} + \dots + \delta_{im}a_{mk}=a_{ik}$$

2) Tôda matriz unidade que post-multiplica uma matriz (quando a multiplicação é possível) dá como produto a matriz considerada.
   Seja A uma matriz do tipo m x n e seja I_n a matriz unidade de ordem n, tem-se $AI_n = A$. Com efeito, o elemento da i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz produto AI_n é a soma dos produtos
   $$a_{i1} \delta_{1k} + \delta_{2k} + \dots + a_{ik} \delta_{kk} + \dots + a_{in} \ nk = a_{ik}$$

3) Tôda matriz unidade é comutável com tôda matriz quadrada.

de mesma ordem.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij} \qquad IA = AI = A$$

A matriz unidade desempenha o mesmo papel que o numero 1 na multiplicação de números reais.

Matriz transposta

Dada uma matriz qualquer A, chama-se matriz transposta de A e representa-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se as linhas de A por suas colunas. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A transposta de A será

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se A é uma matriz do tipo m x n, então A^t será uma matriz do tipo n x m e o elemento a_{ij} de A será o elemento a_{ji} de A^t

Propriedades da matriz transposta

Admitindo-se que A e B são matrizes conformes para a soma e produto indicados, tem-se:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(A^t)^t = A$
5. $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

1) A transposta da soma de duas matrizes é igual à soma de suas transpostas. A demonstração é trivial. Somar duas matrizes conformes e, em seguida, formar a transposta da soma equivale à formar as transpostas das parcelas e somar os resultados.

2) A transposta do produto de um escalar λ pela matriz A é igual ao produto do escalar λ pela transposta de A.
Quando se multiplica uma matriz por um escalar todos os seus elementos ficam multiplicados por êsse escalar. Multiplicando-se a transposta de uma matriz por um certo número, todos os elementos são igualmente multiplicados por êsse número.

3) $(AB)^t = B^t A^t$ A transposta de um produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas dos fatores tomados em ordem contrária.

Seja $A = \left[a_{ij}\right]$ uma matriz do tipo m x n e seja $B= \left[b_{ij}\right]$ uma matriz do tipo n x p; então a matriz produto $C=AB=\left[c_{ij}\right]$ é do tipo m x p.
A matriz A^t é do tipo n x m, e a matriz B^t é do tipo pxn e a matriz $(AB)^t$ é do tipo p x m.

A matriz produto das transpostas A^tB^t não existe, porém existe a matriz produto B^tA^t que é do tipo p x m.
Seja c_{ij} o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz AB

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \qquad (1)$$

Por outro lado, os elementos da jésima linha de B^t são b_{1j}, $b_{2j}, \dots b_{nj}$ porque eram os elementos da j-ésima coluna de B.
Os elementos da i-ésima coluna de A^t são $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$ porque eram os elementos da i-ésima linha de A. Então o elemento da j-ésima linha e i-ésima coluna de B^tA^t é $b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{nj}a_{in}$ que é igual a (1) logo $(AB)^t = B^tA^t$

4) $(A^t)^t = A$. Esta propriedade é trivial.

5) $(ABC)^t = C^tB^tA^t$

$$(ABC)^t = \left[(AB)\ C \right]^t = C^t\ (AB)^t = C^tB^tA^t$$

Exercícios

1) Dadas as matrizes A e B, verificar que $(AB)^t = B^tA^t$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, determinar AA^t e A^tA

3) Sendo A uma matriz arbitrária, pergunta-se em que casos são definidos os produtos AA^t e A^tA.

Suponhamos a matriz A de ordem m x n, consequentemente A^t é de ordem n x m.
Assim, os produtos $A\ A^t$ e A^tA são sempre definidos e produzem matrizes quadradas, isto é, o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz quadrada.

Matrizes simétricas e anti-simétricas

Matriz simétrica é tôda matriz que é igual à sua transposta. As matrizes simétricas são matrizes quadradas e os elementos colocados simètricamente em relação à diagonal principal são iguais.

Sendo A uma matriz simétrica tem-se $A = A^t$ e $a_{ij} = a_{ji}$ em que a_{ij} e a_{ji} são elementos simétricos em relação à diagonal principal.

Matriz anti-simétrica é tôda matriz que é igual à negativa de sua transposta.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ sendo anti-simétrica tem-se $A = -A^t$ e $a_{ij} = -a_{ji}$

Propriedades relativas as matrizes simétricas e anti-simétricas.

1) A soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica como também o produto de um escalar por uma matriz simé - trica produz uma matriz simétrica.

Sejam A e B matrizes simétricas de mesma ordem e λ um escalar.

$A + B = A^t + B^t = (A + B)^t$ portanto A e B é simétrica.

Sendo $A = A^t$ então $\lambda A = \lambda A^t = (\lambda A)^t$

2) A soma de uma matriz quadrada com a sua transposta é uma matriz simétrica.

Seja A uma matriz quadrada e seja A^t a sua transposta. For memos a transposta da soma $A + A^t$. Temos então $(A + A^t)^t =$ $= A^t + A = A + A^t$.

3) A única matriz quadrada que é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica é a matriz nula.

Seja A uma matriz simétrica de ordem 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$, $-A^t = \begin{bmatrix} -x & -y \\ -y & -z \end{bmatrix}$ Devendo ser $A = A^t = -A^t$,

resulta $x = -x$, $y = -y$, $z = -z$ ou $x = y = z = 0$

4) Se A é uma matriz quadrada então $A + A^t$ é uma matriz simé trica e $A - A^t$ é uma matriz anti-simétrica.

A primeira parte foi vista anteriormente. Quanto à segunda basta tomar a transposta de $A - A^t$ que dá $(A-A^t)^t = A^t -$ $- (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$.

5) Tôda matriz quadrada pode ser decomposta na soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Seja A uma matriz quadrada. Temos $A = 1/2(A+A^t)+1/2(A-A^t)$

Sendo $1/2(A+A^t)$ uma matriz simétrica e $1/2(A-A^t)$ uma matriz anti-simétrica está provada a propriedade.

Exercício - Decompôr a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

em uma soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A + A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 10 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A - A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6) O produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

Basta provar que $AA^t = (AA^t)^t$ Com efeito $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$. Assim, por exemplo a matriz 3 x 3 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ multiplicada pela sua transposta dá:

$$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ad + be + cf & ag + bh + ci \\ ad + be + cf & d^2 + e^2 + f^2 & dg + eh + fi \\ ag + bh + ci & dg + eh + fi & g^2 + h^2 + i^2 \end{bmatrix}$$

7) O produto de duas matrizes é simétrico se e sòmente se as duas matrizes comutam.

Sejam A e B duas matrizes simétricas. Tomemos a transposta de seu produto $(AB)^t = B^t A^t = BA$. Se $AB = BA$ segue-se que a matriz produto é simétrica.

8) Qualquer potência de uma matriz simétrica é uma matriz simétrica.

Sejam A e B duas matrizes simétricas. Tem-se $(AB)^t = BA$

Fazendo-se $A = B$ resulta $A^2 = (A^2)^t$

9) Se A é uma matriz simétrica de ordem m, e se P é uma matriz de ordem m x n, então a matriz $B = P^tAP$ é simétrica.

Com efeito, $B^t = (P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tA^tP = P^tAP$

Anàlogamente, prova-se que se A é uma matriz quadrada anti-simétrica de ordem m e se P é uma matriz de ordem m x n então a matriz $B = P^t\,AP$ é anti-simétrica.

Matrizes quadradas especiais

Matriz idempotente - Chama-se "idempotente" a matriz quadrada A que é igual ao seu quadrado. Sendo A uma matriz idempotente, tem-se $A^2 = A$. Exemplo.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=A$$

Agora vamos mostrar que, se para as matrizes quadradas A e B pode-se escrever $AB = A$ e $BA = B$ então as matrizes A e B são idempotentes.

$$\left.\begin{array}{l} ABA = (AB)A = A^2 \\ ABA = A(BA) = AB=A \end{array}\right\} \text{donde } A^2=A \qquad \left.\begin{array}{l} BAB=(BA)B=BB=B^2 \\ BAB=B(AB)=BA=B \end{array}\right. \text{donde } B^2=B$$

Matriz nilpotente é uma matriz quadrada A para a qual $A^n = 0$, sendo n um inteiro positivo. Se n é o menor inteiro positivo para o qual $A^n = 0$, diz-se que a matriz A é nilpotente de índice n. Vejamos um exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A expressão geral das matrizes quadradas, não nulas, de ordem 2, que sejam nilpotentes de índice 2 obtem-se, tendo em vista a definição

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a^2 + bc = 0 & ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 & bc + d^2 = 0 \end{matrix}$$

Supondo $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ resulta

$$\begin{bmatrix} a & -\dfrac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} ac & -a^2 \\ c^2 & -ac \end{bmatrix}$$

Traço de uma matriz quadrada

Chama-se traço de uma matriz quadrada à soma dos têrmos de sua diagonal principal. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem n. O traço da matriz A é, por definição, a soma dos elementos que formam a sua diagonal principal e representa-se com a notação:

$$\text{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

É fácil ver que, se A e B são matrizes n x n e λ é um escalar qualquer, tem-se

$$\text{tr}\,(A + B) = \text{tr}\,(A) + \text{tr}\,(B)$$
$$\text{tr}\,(\lambda a) = \lambda \cdot \text{tr}\,(A)$$
$$\text{tr}\,(AB) = \text{tr}\,(BA)$$

Para verificar que tr (AB) = tr (BA) consideremos as matrizes A e B do tipo 3 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Representemos por c_{ii} e d_{ii} respectivamente, um elemento qualquer da diagonal principal da matriz AB e da matriz BA,

$$c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + a_{i3}b_{3i} \qquad d_{i1}=b_{i1}a_{1i}+b_{i2}a_{2i}+b_{i3}a_{3i}$$

Os traços das matrizes AB e BA são respectivamente:

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}b_{1i} + \sum_{i=1}^{3} a_{i2}b_{2i} + \sum_{i=1}^{3} a_{i3}b_{3i}$$

$$\sum_{i=1}^{3} d_{i1} = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} + \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i2} + \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i3}$$

Êstes dois somatórios são iguais porque contêm as somas dos produtos da forma $a_{pq}\ b_{qp}$ em que p e q assumem valores de 1 a 3.

Propriedade: "Se duas matrizes comutam, então são ambas quadradas e de mesma ordem"

Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$ e $p \times q$, respectivamente. Se elas comutam, isto é, se AB = BA, logo existem os produtos AB e BA. Existindo AB resulta ser $n = p$, e existindo BA resulta ser $q = m$.

Sendo iguais as matrizes produto AB e BA logo elas são de mesma ordem, isto é, $mq = pn$. Dai resulta ser $q^2 = p^2$ e finalmente $p = q = n = m$.

1.11 Determinante de uma matriz quadrada

Inversões - Sendo dada uma permutação dos n primeiros números, diz-se que nessa permutação dois números quaisquer apresentam uma inversão quando o maior dêsses dois números está colocado antes do menor.

Dividem-se as permutações dos n primeiros números em duas classes: as permutações de primeira classe que contêm um número par de inversões e as permutações de segunda classe que contêm um número ímpar de inversões.

A permutação 123 ... n, na qual os números se sucedem em ordem de grandeza crescente é chamada "permutação principal"; ela não contêm nenhuma inversão; considera-se como pertencente à primeira classe.

Quando em uma permutação dois elementos quaisquer são trocados a permutação muda de classe.

Definição de determinante - Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

de ordem n sôbre o corpo K.

Com elementos extraidos dessa matriz formemos todos os produtos possíveis de n fatôres de modo que em cada produto os fatôres pertençam a linhas e colunas diferentes. Ordenemos êsses produtos de modo que os primeiros sub índices fiquem na ordem natural 1, 2, ... n, e, assim, em cada produto, o primeiro fator pertence a primeira linha de A, o segundo fator pertence à segunda linha de A, etc...

Uma vez que os fatores devem vir de colunas diferentes, a sequência dos segundos sub-índices formam uma permutação. Conforme a permutação dos segundos sub índices de cada fatôr seja da primeira classe ou não o produto será afetado do sinal mais ou menos respectivamente.

A soma de todos êsses produtos de n fatores extraidos da matriz A e definidos nas condições acima constitue o determinante da matriz A e se representa por $|A|$ que se lê: determinante de A.

Determinantes de 2ª ordem e de 3ª ordem

Vimos que determinante de uma matriz quadrada de ordem n é a soma algébrica dos produtos obtidos permutando-se de todos os modos possíveis os primeiros índices da diagonal principal deixando-se fixos os segundos índices, precedendo-se do sinal + (mais) os termos que apresentam um número par de inversões e do sinal - (menos) os termos que apresentam um número ímpar de inversões.

Apliquemos a definição acima dada para os determinantes de 2ª ordem e de 3ª ordem:

Sejam as matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} \, a_{22} = + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm a_{11} a_{22} a_{33} =$$

$$= + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Como se observa, o valor de um determinante de 2ª ordem se obtém subtraindo-se do produto dos elementos da diagonal principal o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 7 - 2 \times 3 = 35 - 6 = 29$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \times 1 - (-3)2 = 7 + 6 = 13$$

Por outro lado para se calcular o valor de um determinante de 3ª ordem, existe uma regra empírica devida ao matemático Sarrus, condensada no esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

<u>Regra de Sarrus</u>: A direita do quadro dos elementos da matriz escrevem-se as duas primeiras colunas da matriz; a seguir efetuam-se os produtos dos três elementos situados sôbre a diagonal principal e sôbre as paralelas a ela tomando-se êsses produtos com o mesmo sinal, depois, efetuam-se os produtos dos três elementos situados sôbre a diagonal secundária e sôbre as paralelas a ela, tomando-se êsses produtos com sinal contrário.

Exemplos

1) Calcular o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Temos

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 & \\ 3 & 1 & 7 & 3 & 1 & \\ -18 & -10 & -84 & +84 & +45 & +4 \end{array}$$

Então:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \cancel{+84} + 45 + 4 - 18 - 10 \cancel{-84} = 49 - 28 = + 21$$

Resposta: + 21

2) Calcular o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Temos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & \\ -3 & 2 & 5 & -3 & 2 & \\ 4 & -1 & 7 & 4 & -1 & \\ +8 & +5 & +42 & +14 & +40 & -3 \end{array}$$

Então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = + 14 + 40 - 3 + 8 + 5 + 42 = 106$$

Resposta: 106.

Propriedades dos determinantes

1. O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta
2. Trocando-se, uma pela outra, duas linhas ou duas colunas, o determinante muda de sinal.
3. Se cada elemento de uma linha ou de uma coluna de uma matriz quadrada é igual a zero, então o seu determinante é nulo.
4. Multiplicando-se ou dividindo-se os elementos de uma linha ou de uma coluna de um determinante por um mesmo número o determinante fica multiplicado ou dividido por êsse número.
5. Se os elementos de duas linhas ou de duas colunas são proporcionais, o determinante é nulo.
6. Se os elementos de uma linha ou de uma coluna de um determinante são somas de p têrmos, o determinante pode-se escrever sob forma de uma soma de p determinantes.
7. Um determinante não se altera quando se substitue uma linha ou uma coluna por sua soma com combinações lineares de linhas ou colunas paralelas.

Definição - Se A é uma matriz quadrada, chama-se "cofator" ou "complemento algébrico" de um elemento a_{rs} de A o número obtido multiplicando-se por $(-1)^{r+s}$ o determinante da matriz que se obtem suprimindo-se a linha e a coluna que se cruzam em a_{rs}.

A matriz obtida substituindo-se os elementos de uma matriz quadrada A pelos seus respectivos cofatôres é a matriz dos cofatôres de A e será indicada por cof A.

Se α_{jk} é o cofator do elemento a_{jk} e sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\text{Cof } A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Matriz adjunta de uma matriz quadrada - A transposta da matriz dos cofatôres de uma matriz quadrada A é chamada "matriz adjunta" da matriz A e será indicada por adj A. Por definição adj A = $(\text{cof } A)^t$

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ adj $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Teorema de Laplace - O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna pelos seus respectivos complementos algébricos.

Assim, indicando com A_{rs} o cofator do elemento a_{rs} da matriz quadrada A tem-se

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \dots + a_{rn}A_{rn}$$

Corolário - A soma dos produtos dos elementos de uma linha ou de uma coluna pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra linha ou de outra coluna é igual a zero.

$$\text{Assim, } a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = 0 \quad (r \neq s)$$

De uma maneira genérica pode-se escrever:

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = (\det A)\, \delta_{rs} \quad \text{onde}$$

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases}$$

Teorema - O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$$\det (AB) = \det A \det B$$

1.12 Inverso de uma matriz

Uma matriz quadrada A é dita "singular" se $|A| = 0$. Se, entretanto, $|A| \neq 0$, a matriz A é dita "não-singular"

Se A e B são duas matrizes quadradas tais que $AB = BA = I$, sendo I a matriz identidade, diz-se que a matriz B é o inverso da matriz A ou que a matriz A é o inverso da matriz B e escreve-se $B = A^{-1}$ e $A = B^{-1}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = BA = I$$

Para maior simplicidade, consideraremos, nas demonstrações seguintes, determinantes e matrizes quadradas de terceira ordem. A extensão para matrizes quadradas de ordem qualquer se faz fàcilmente.

Teorema da existência da matriz inversa

"A condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada seja inversível é que o seu determinante seja diferente de zero".

A condição é necessária

Seja A uma matriz quadrada, não nula, de terceira ordem.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se existe uma matriz inversa da matriz A, por definição ela deve comutar com A. Logo as matrizes A e A^{-1} devem ser quadradas de ter ceira ordem. Sendo I a matriz identidade de mesma ordem que A tem-se

$A \cdot A^{-1} = I$ e $|A| \times |A^{-1}| = 1$ donde se conclue ser $|A| \neq 0$

Portanto a condição é necessária.

A condição é suficiente - Suponhamos que a matriz quadrada A seja não singular, isto é, $|A| \neq 0$, vamos mostrar que existe uma matriz inversa da matriz A.

Representemos por C a matriz obtida dividindo-se por $|A|$ a matriz adjunta da matriz A.

$$C = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Formando-se os produtos de matrizes AC e CA obtem-se matrizes unidade, isto é, AC = CA = I. Isto porque os elementos da diagonal principal dessas matrizes produto são iguais a soma dos produtos dos elementos de uma certa fila de A pelos cofatores correspondentes (esta soma é igual ao determinante de A), e os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais à soma dos produtos dos elementos de uma certa fila pelos cofatores correspondentes à outra fila (esta soma é igual a zero)

$$AC = CA = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Portanto C é uma matriz inversa da matriz A.

"Cálculo da matriz inversa de uma matriz não singular".

Vimos anteriormente que, sendo A uma matriz quadrada não singular, existe uma matriz $C = \frac{\text{adj } A}{|A|}$ tal que $AC = CA = I$

Escreve-se portanto $A \frac{\text{adj } A}{|A|} = I$. Premultiplicando, ambos os membros por A^{-1} vem $A^{-1} A \frac{\text{adj } A}{|A|} = A^{-1} I$ ou

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

"A matriz inversa de uma matriz não singular A é igual à matriz adjunta de A dividida pelo determinante de A"

Exemplo: Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Sendo det A = 15, a matriz A é inversível.

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} -5 & -15 & 10 \\ 8 & 9 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -15 & 9 & 6 \\ 10 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -15 & 9 & 6 \\ 10 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA INVERSÃO

1) "A inversa de uma matriz não singular é única"

Seja A uma matriz não singular. Admitamos que existam duas matrizes B e C tais que $AB = I$ e $CA = I$. Pre multiplicando a primeira por C e post multiplicando a segunda por B vem $CAB = C$, $CAB = B$ donde $B = C$.

2) Agora vamos mostrar que sendo A uma matriz quadrada e I uma matriz identidade a igualdade $AD = I$ implica ser $D = A^{-1}$.

Da igualdade $AD = I$ conclue-se que A, D e I são matrizes quadradas de mesma ordem. Logo $|A| \times |D| = 1$ e $|A| \neq 0$. Portanto existe A^{-1}. $(A^{-1}A)D = A^{-1}I$ ou $D = A^{-1}$. O mesmo resultado seria obtido se, em lugar de $AD = I$ fôsse $DA = I$.

Definição - Inverso de uma matriz diagonal

Viu-se anteriormente que o produto de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são os produtos dos elementos de igual posição nas matrizes dadas. Daí deduz-se que:

3) "O inverso de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal cujos elementos são respectivamente os inversos dos elementos de igual posição da matriz diagonal dada". Assim por exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

Caso particular - O inverso de uma matriz unidade coincide com ela mesma.

4) "Se a matriz A é inversível, então a sua inversa também é inversível e o inverso da matriz inversa de A coincide com A".

Seja $B = A^{-1}$ então $AB = BA = I$ o que mostra ser $B^{-1} = A$, donde $(A^{-1})^{-1} = A$

5) "A inversa do produto de duas matrizes é igual ao produto das inversas em ordem contrária".

Sejam A^{-1} e B^{-1} respectivamente, os inversos das matrizes quadradas A e B,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad e \quad BB^{-1} = B^{-1}B = I \qquad \text{Temos:}$$

$$(AB)\ (B^{-1}A^{-1}) = A\ (BB^{-1})\ A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1}\ O\ I$$

$$(B^{-1}A^{-1})\quad (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

de modo que $B^{-1}A^{-1}$ é o inverso de AB, por definição do inverso.

Definição - Matriz involutiva é a matriz quadrada que é igual ao seu próprio inverso.

Se a matriz A é involutiva, tem-se $A^2 = I$. A matriz identidade é um exemplo de matriz involutiva. A matriz seguinte constitue um outro exemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3/2 & -1/2 & 9/4 \\ 1 & -1 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3/2 & -1/2 & 9/4 \\ 1 & -1 & 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A expressão geral das matrizes quadradas de ordem 2 que sejam involutivas obtem-se determinando-se os elementos a,b,c,d que constituem uma matriz quadrada de ordem 2 de modo que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Admitamos que sejam diferentes de zero os elementos a,b,c,d. Tem-se as equações:

$$a^2 + bc = 1 \quad (a + d)b = 0 \quad \text{donde } a = -d \quad e \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$$

$$d^2 + bc = 1 \quad (a + d)c = 0 \quad c = \frac{1 - a^2}{b}$$

6) A transposta de uma matriz inversa é igual a inversa da matriz transposta.

$A^{-1}A = I$, $(A^{-1}A)^t = I^t$, $A^t(A^{-1})^t = I$ pre multiplicando por $(A^t)^{-1}$ vem: $(A^t)^{-1}A^t(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}\,I$ ou

$I(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ ou $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

7) Dada uma matriz quadrada A, não singular, a inversa da matriz inversa de A é a própria matriz A.

Façamos $(A^{-1})^{-1} = C$ Pre multiplicando por A^{-1} vem

$A^{-}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}C$ ou $I = A^{-1}C$. Pre multiplicando por

A vem $AI = AA^{-1}C$ ou $A = C$ Ou $(A^{-1})^{-1} = A$

8) Sendo A uma matriz quadrada não singular, se $AB = 0$, então B é uma matriz nula. Com efeito, pre multiplicando $AB = 0$ por A^{-1} vem $A^{-1}(AB) = 0$ ou $(A^{-1}A)B = 0$ ou $IB = 0$ donde $B = 0$.

9) O inverso de uma matriz simétrica é tambem uma matriz simétrica.

Seja uma matriz simétrica $S = S^t$

$S^{-1} = (S^t)^{-1} = (S^{-1})^t$ donde S^{-1} é uma matriz simétrica.

Problemas sôbre inversão de matrizes

Determinar as condições para que as seguintes matrizes sejam inversíveis.

$$\begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & a & a & a \\ x & x & b & b \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Resp. $a \neq b$, $xyz \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq a$, $x \neq b$, $x \neq c$

Determinar o inverso da matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

"O grupo das matrizes inversíveis"

"O conjunto de tôdas as matrizes quadradas não singulares e de uma certa ordem, constitue um "grupo" em relação à operação multiplicação".

Sistemas de equações lineares

Supponhamos um sistema de $\underline{n}$ equações lineares a $\underline{n}$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n = k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \dots + a_{nn}\,x_n = k_n \end{cases}$$

Seja Δ o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas do sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$, suposto diferente de zero.

Um sistema no qual o número de equações lineares é igual ao número de incógnitas e cujo determinante é diferente de zero ($\Delta \neq 0$) é denominado sistema crameriano.
Todo sistema crameriano é determinado, ou seja, apresenta um conjunto único de soluções.

As fórmulas de Cramer para resolução do sistema acima dado são as seguintes:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

ou seja, simbolicamente:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \quad ,$$

onde Δ_i é um determinante obtido de Δ quando se substitui a coluna dos coeficientes da incógnita x_i pelos termos independentes, $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$.

Assim, por exemplo, temos para a incógnita x_1:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

oOoOoOoOo

<u>Exemplo</u>:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 7x - 4y = 10 \end{cases}$$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 21 = -41 \neq 0$$ (sistema cramériano)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} = -52 - 30 = -82$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 91 = -41$$

Então:

$$x = \frac{\Delta_x}{} = \frac{-82}{-41} = \neq 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{} = \frac{-41}{-41} = +1$$

Resposta: $x = 2$ e $y = 1$

oOoOoOoOoOoOoOo

MEDIDAS DE VARIABILIDADE OU DISPERSÃO

1. C o n c e i t u a ç ã o

No capítulo precedente vimos como obter o valor representativo para todos os demais de determinado conjunto.

Entretanto, torna-se evidente que apenas as medidas de tendência central não caracterizam uma distribuição; vejamos as distribuições abaixo, contendo cada uma delas, cinco valores :

I	-	120, 120, 120, 120, 120
II	-	116, 118, 120, 122, 124
III	-	5, 17, 51, 140, 387

Observando as distribuições acima mencionadas verificamos que TODAS AS TRÊS possuem a mesma média aritmética e as medianas das duas primeiras distribuições são idênticas.

Entretanto, uma observação ligeira revela que existem positivas diferenças entre elas : na primeira distribuição tanto a média como a mediana podem representar todos os valores e cada um dos termos com perfeita precisão; na segunda distribuição tanto a média como a mediana coincidem apenas com um dos valores, havendo erros para mais ou para menos se se empregar um ou outro valor para representar todos os valores, erros esses que são contrabalançados, uns por excesso e outros por falta ; na terceira distribuição, nem a média nem a mediana representam particularmente bem todos os termos pois estes se acham muito afastados da média ou da mediana, não podendo sequer serem escolhidos como representantes dos demais.

Uma das principais diferenças entre as distribuições acima mencionadas é a grande diferença entre os grâus de concentração de valores; na primeira distribuição os valores são idênticos; na segunda há uma pequena dispersão de valores, permanecendo, entretanto, suficientemente próximos uns dos outros; na terceira há uma grande dispersão de valores, sem tendência alguma para qualquer ponto de concentração .

Neste capítulo estudamos as medidas que permitem avaliar dispersão dos dados. Estas medidas são indistintamente chamadas medidas de dispersão, medidas de variabilidade ou medidas de variação . Levando-se em consideração as mesmas medidas, tomando-se entretanto pelo ponto de vista oposto, poderão ser consideradas como medidas de concentração ou medidas de congregação; preferimos as primeiras designações para avaliar a dispersão dos dados.

Definindo, variabilidade é a maior ou menor diversificação dos dados ou valores, em tôrno de um valor de tendência central, tomado como ponto de comparação .

A variabilidade pode ser avaliada através de medidas absolutas e relativas. São elas :

I - Medidas absolutas :

1. Amplitude total
2. Desvio quartil
3. Desvio médio
4. Desvio padrão

II - Medidas relativas

1. Desvio quartil reduzido
2. Coeficiente de variação de Pearson
3. Coeficiente de variação de Thorndike.

As medidas absolutas têm a mesma natureza ou vêm expressas na mesma unidade dos dados ou valores, enquanto as medidas relativas vêm expressas em termos de percentagem.

2. Medidas de Variabilidade Absoluta

2.1 Amplitude total ou intervalo total

Amplitude total é a diferença entre os valores máximo e mínimo de uma distribuição.

O intervalo total ou amplitude total leva em conta apenas os extremos das séries de resultados e não é fidedigno quando N (total da distribuição) é pequeno ou quando há lacunas (frequências nulas) na distribuição de frequência; é a mais simples das medidas de dispersão mas é de grande instabilidade, o que desaconselha o seu uso nos casos em que a exatidão deva ser levada em conta.

Suponhamos abaixo as notas obtidas por 90 estudantes em uma prova, cuja nota máxima possível é 210.

104	57	85	203	128
121	81	105	107	100
166	109	138	75	114
75	118	109	101	81
65	143	102	107	157
149	94	165	151	181
49	158	95	206	55
81	191	142	85	82
114	79	81	136	133
122	76	103	158	43
159	150	88	176	133
153	89	89	156	112
136	92	106	112	90
119	156	82	84	163
147	179	123	104	85
131	73	107	164	158
168	93	154	102	112
69	139	142	113	147

Observando as 90 notas acima, verifica-se que a nota mais alta é 206 e a mais baixa é 43.

Calculando a amplitude total tem-se :

206 - 43 = 163

Quando dizemos que o intervalo total da série acima é 163, afirmamos alguma coisa acêrca do grau de sua concentração.

Com referência àquelas três distribuições mencionadas no início deste capítulo, seus intervalos totais seriam :

I	-	120	-	120	=	0
II	-	124	-	116	=	8
III	-	813	-	5	=	808

É evidente que, quanto maior o intervalo total, tanto maior a dispersão dos valores no grupo.

Em se tratando de uma distribuição de frequência (tabela de frequência), não se conhecendo os valores máximo e mínimo dos dados, a amplitude é medida pelos limites inicial da primeira classe e final da última classe.

Sendo a instabilidade do intervalo total seu mais grave defeito, somente quando a compreensão popular fôr mais importante do que a exatidão e a estabilidade far-se-á uso da amplitude ou intervalo total.

2.2 Desvio quartil ou intervalo semiquartil(Q)

Desvio quartil é a semidiferença entre os quartis 3º e 1º, cuja amplitude em tôrno da mediana abrange os 50% mais centrais dos indivíduos. Pode-se dizer, também, que a amplitude semiquartílica ou Q situa-se na escala na metade da distância entre o 75º e o 25º percentis de uma distribuição de frequência, levando-se em conta a normalidade dessa distribuição.

Quando se conhecem esses dois pontos, o 75º percentil (ou Q3) e o 25º percentil (ou Q_1), a amplitude semiquartílica, também chamada <u>amplitude semi-interquatílica</u> ou D_q é calculado pela fórmula :

$$D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (1)$$

Temos evidentemente que começar calculando o 75º e o 25º percentis, ou Q_3 e Q_1 respectivamente, aplicando as seguintes fórmulas :

$$Q_1 = l_i + \frac{\left(N/4 - fa_{m-1} \right) i}{f_m} \qquad (2)$$

$$Q_3 = l_i + \frac{\left(3N/4 - fa_{m-1} \right) i}{f_m} \qquad (3)$$

onde

l_i = o limite inicial da classe em que se encontra o quartil ;

i = o intervalo de calsse

fa_{m-1} = a frequência acumulada da classe anterior à classe a que pertence o quartil;

f_m = a frequência da classe em que se encontra o quartil.

<u>Exemplo 1</u> :

Agrupando a relação anterior de notas dos 90 alunos em uma distribuição da frequência, calcular o <u>intervalo semiquartil</u> .

Façamos, primeiramente, a tabela de frequência .

X (Notas)			f
0	-	49	2
50	-	99	27
100	-	149	39
150	-	199	20
200	-	249	2
		Σf	90

Calculando as frequências acumuladas :

X	f	fa
0 - 49	2	2
50 - 99	27	29
100 - 149	39	68
150 - 199	20	88
200 - 249	2	90
Σ	90	-

Para o cálculo do Q_1, aplicando a fórmula (2), teremos

$$Q_1 = 50 + \frac{(23 - 2)\ 50}{27}$$

$$Q_1 = 50 + \frac{21 \times 50}{27}$$

$$Q_1 = 50 + \frac{1\ 050}{27}$$

$$Q_1 = 50 + 38{,}89 \quad \therefore \quad Q_1 = 88{,}89$$

Aplicando a fórmula 3, teremos

$$Q_3 = 100 + \frac{(68 - 29)\ 50}{39} \quad \therefore \quad Q_3 = 100 + \frac{(39)50}{39}$$

$$Q_3 = 100 + 50 \qquad Q_3 = 150$$

Achados Q_1 e Q_3, pode-se calcular o <u>intervalo semiquartil</u>, também chamado <u>desvio quartil.</u>

Donde :

$$D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad \therefore \quad D_q = \frac{150 - 89}{2}$$

$$D_q = \frac{61}{2} \quad \therefore \quad D_q = 30{,}5$$

2.3 <u>Desvio Médio</u>

<u>Desvio médio é a média dos valores absolutos dos desvios dos dados, a partir de um valor de tendência central (média ou mediana)</u> . O desvio médio é menor quando calculado com base na mediana do que quando obtido de qualquer outra medida de tendência central, pelo que devemos basear o seu cálculo naquela medida. Ao cacularmos a média dos desvios para achar o DM (desvio médio), não levamos em conta ' os sinais, sendo todos os desvios, quer negativos quer positivos, considerados como positivos.

Se conservássemos os sinais e se adicionássemos os desvios algèbricamente, os valores positivos e os valores negativos se anulariam recìprocamente, pois é caracte -

rística da média aritmética de qualquer série de valores ser ZERO a soma algébrica dos seus afastamentos.

De fato, é esta a característica que torna possível o cálculo da média pelo método abreviado. Nesse método imaginamos uma média e efetuamos a soma algébrica dos afastamentos ; acontecendo ser tal soma igual a ZERO, concluímos que a média suposta coincide com a média verdadeira ; se a soma dos afastamentos resulta como em geral acontece, diferente de zero, corrigimos a média suposta para determinação da média real. Daí computarmos a média dos afastamentos desprezando-se os sinais e somando-se os seus valores absolutos.

No cálculo do desvio médio encontramos 3 variedades : o cálculo de dados simples isolados ; o cálculo de valores isolados ponderados e o cálculo de uma distribuição de frequências por classes de valores.

2.3.1 Cálculo do DM de valores isolados simples :

Sejam os valores

$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_n,$

onde <u>md</u> é a mediana

Temos por conseguinte que

$d_1 = X_1 - md$

$d_2 = X_2 - md$

$d_n = X_n - md$

Assim, o DM será igual à média aritmética dos desvios, tomados em valores absolutos

n

Exemplo 2

Seja calcular o desvio médio de 4,7,9,12,15 e 16

Temos que md = 9

Assim ,

x	d (desvio)	$\|d\|$
4.......	- 5	5
7	- 2	2
9	-	-
12	3	3
15	6	6
16	7	7
$\sum$	-	23

Aplicando a fórmula (4) encontramos

$$DM = \frac{23}{6} \doteq 3,83$$

2.3.2 Cálculo do DM de valores isolados ponderados :

Consideremos os seguintes valores repetidos

$$\underbrace{X_1, X_1, \ldots X_1}_{P_1 \text{ vêzes}}, \quad \underbrace{X_2, X_2 \ldots X_2}_{P_2 \text{ vêzes}}, \ldots \underbrace{X_n, X_n, \ldots X_n}_{P_n \text{ vêzes}}$$

Apresentando os valores acima numa tabela e considerando md como a mediana, encontramos :

x	p	d	$\lvert pd \rvert$
x_1	p_1	d_1	$\lvert p_1 d_1 \rvert$
x_2	p_2	d_2	$\lvert p_2 d_2 \rvert$
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
x_n	p_n	d_n	$\lvert p_n d_n \rvert$
$\sum$			

Donde podemos concluir que

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert p_i \; d_i \rvert}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad (5)$$

Exemplo 3

Seja calcular o desvio de :

X	p
2	7
3	8
4	15
5	7
6	3
	40

Calculando a md encontramos md = 4

Assim,

X	P	d	pd	|pd|
2	7	-2	-14	14
3	8	-1	- 8	8
4	15	-	-	-
5	7	1	7	7
6	3	2	6	6
Total	40	-	-	35

Aplicando a fórmula (5) encontramos

$$DM = \frac{35}{40} \quad \therefore \quad DM = 0{,}875$$

2.3.3 Cálculo do DM de frequência por classes de valores :

Nas distribuições de frequências, substituimos os pêsos pelas frequências, ficando a fórmula (5) expressa da seguinte maneira :

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_i d_i|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad (6)$$

Fazendo, para simplificar, $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$, teremos que

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_i d_i|}{N} \qquad (7)$$

<u>Exemplo 4</u>

Seja a distribuição de frequência abaixo :

Classes	f_i
0 - 3	3
4 - 7	9
8 - 11	11
12 - 15	2
$\sum f_i$	25

Assim,

X	f_i	f_a	m_i	d_i	$f_i d_i$	$\|f_i d_i\|$
0 - 3..	3	3	2	-6,4	-19,2	19,2
4 - 7..	9	12	6	-2,4	-21,6	21,6
8 - 11..	11	23	10	1,6	17,6	17,6
12 - 15..	2	25	14	5,6	11,2	11,2
Total.....	25	-	-	-	-	69,6

Calculando a posição da mediana :

$$Emd = \frac{N + 1}{2} = \frac{25 + 1}{2} \quad Emd = 13$$

Aplicando a fórmula da mediana, encontramos

$$md = 8 + \frac{(13 - 12)\,4}{11}$$

$$md = 8 + \frac{4}{11} = 8 + 0,4 \;\therefore\; md = 8,4$$

donde finalmente, aplicando a fórmula (7)

$$DM = \frac{69,6}{25} \;\therefore\; DM = 2,78$$

Para as operações de cálculo do desvio - médio, em tabelas de frequência, obedecemos, pois, ao seguinte processo:

a) calcular a mediana (ou média, se se preferir);

b) calcular o afastamento entre o ponto médio das diversas classes e a referida média, subtraindo esta daquele ;

c) multiplicar a frequência de cada classe pelo valor de afastamento dos respectivos pontos médios em relação à média ;

d) adicionar os produtos assim obtidos, desprezados os sinais ;

e) dividir a soma obtida desse modo por N (Σf_i).

2.3.4 Características do Desvio-Médio

O desvio médio (DM) apresenta as seguintes características :

a) depende de todos os valores da distribuição ;

b) pode ser calculado a partir da média ou da mediana ;

c) é mínimo quando calculado a partir da mediana.

Na distribuição normal, o DM, quando medido na escala para cima e para baixo da média, inclui os 57,5% dos casos situados no meio da distribuição. O DM é, portanto, sempre um pouco maior do que o desvio quartil (dq) que compreende os 50% dos casos situados no centro da distribuição.

2.4 Desvio-Padrão ou Afastamento Padrão

Desvio-padrão é a raiz quadrada da média dos quadrados dos desvios a partir da média aritmética. O afastamento-padrão, afastamento quadrático médio ou desvio-padrão, constitui a mais comum e a mais útil das medidas para avaliarmos a dispersão, pelos seguintes motivos :

a) o intervalo total, como vimos, é instável, devido à influência dos casos extremos cujo valor é em grande parte, devido ao acaso ;

b) o desvio-quartil não leva, arbitràriamente, em consideração, a metade das ocorrências ;

c) o afastamento médio despreza o fato de serem alguns afastamentos negativos e outros positivos e trata-os todos como positivos.

Costumamos representar, em trabalhos científicos, o desvio padrão pelo sigma minúsculo (σ); entretanto, aqui, será representado pela letra S, levando em consideração ser "Standard deviation" a designação do desvio-padrão, em inglês:

Tanto o desvio-padrão como o desvio-médio se baseiam nos afastamentos em relação à média. Entretanto o desvio-médio despreza os sinais dos afastamentos; e o desvio - padrão toma a média quadrática dos desvios em vez de sua média aritmética. O desvio-padrão é, assim, a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios.

Como nos cálculos do desvio-médio, podemos calcular o desvio-padrão levando em consideração 3 casos : o desvio-padrão de dados simples e isolados; o desvio-padrão de valores isolados ponderados e, finalmente, o desvio-padrão de uma distribuição de frequências por classes de valores .

2.4.1 Desvio-padrão de valores isolados

Quando os dados não se encontram agrupados, procede-se da seguinte maneira :

a) achar a média ;

b) achar o desvio entre cada um dos valores e a média (os valores mais baixos apresentam desvios negativos e, os mais altos, desvios positivos);

c) elevar ao quadrado essas diferenças ;

d) somar os quadrados ;

e) dividir a soma encontrada por N

f) extrair a raiz quadrada do quociente

Exemplo 5

Assim, sejam os valores abaixo

$$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n$$

sendo $\overline{x}$ a média aritmética dos n valores acima

Calculando os desvios em tôrno da média aritmética, encontramos

$$d_1 = X_1 - \overline{x}$$

$$d_2 = X_2 - \overline{x}$$

$$d_3 = X_3 - \overline{x}$$

$$d_n = X_n - \overline{x}$$

Encontrando a média quadrática dos n desvios, teremos calculado o desvio-padrão.

Assim,.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}} \qquad (8)$$

Suponhamos que se deseje extrair o desvio-padrão dos valores,

5, 8, 13, 12 e 15

A média é

$$\bar{x} = \frac{53}{5} = 10,6$$

X_i	d_i	d_i^2
5	- 5,6	31,36
8	- 2,6	6,76
13	2,4	5,76
12	1,4	1,96
15	4,4	19,36
Σ		65,20

Achamos , assim, que a soma dos desvios ao quadrado é :

$$\sum_{i=1}^{5} d_i^2 = 65,20$$

Desde que há cinco desvios, a média dos quadrados dos afastamentos é :

$$\frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{65,20}{5} = 13.04$$

E a raiz quadrada da média será :

$$S = \sqrt{13,04} = 3,61$$

logo,

$$S = 3,61$$

Este processo de achar o afastamento padrão de dados não agrupados é correto ; outro processo, porém, é usualmente empregado por ser mais breve na aplicação e por dar exatamente o mesmo resultado. As instruções para este processo são as seguintes :

a) elevar ao quadrado os números originais ;

b) somar estes quadrados ;

c) dividir esta soma por n ;

d) subtrair deste quociente o quadrado da média ;

e) extrair a raiz quadrada da diferença.

A fórmula, neste caso, apresenta-se assim :

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \bar{x}^2} \qquad (9)$$

Tomemos o exemplo anterior : os valores são 5, 8, 13, 12 e 15; consequentemente seus quadrados serão, respectivamente , 25, 64, 169, 144 e 225, totalizando 627. Então temos :

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = 627$$

donde

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{n} = \frac{627}{5} = 125,40$$

A média será

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{53}{5} = 10,6$$

Elevando ao quadrado a média :

$$\overline{x}^2 = 10,6^2 = 112,36$$

donde, aplicando a fórmula (9), teremos

$$S = \sqrt{\frac{627}{5} - 10,6^2}$$

$$S = \sqrt{125,40 - 112,36}$$

$$S = \sqrt{13,04}$$

$$S = 3,61$$

A equivalência destas duas fórmulas do desvio padrão pode ser verificada do seguinte modo :

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}}$$

Porém, desde que

$d_i = X_i - \overline{x}$, substituindo temos

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2}{n}}$$

donde

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{x} + \overline{x}^2\right)}{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\,\overline{x} \sum_{i=1}^{n} X_i + n\,\overline{x}^2}{n}}$$

ou

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \frac{2\overline{x} \sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + \frac{n\,\overline{x}^2}{n}}$$

como $\dfrac{2\,\overline{x} \sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 2\,\overline{x}\,\overline{x} = 2\,\overline{x}^2$

e $\dfrac{n\,\overline{x}^2}{n} = \overline{x}^2$, temos que :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2}$$

donde concluimos que

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

2.4.2 Desvio-Padrão de valores isolados ponderados

Ao cálculo do desvio-padrão de valores isolados ponderados, aplica-se o mesmo tipo de raciocínio adotado para o ítem anterior, sendo que a fórmula do desvio-padrão passa a ter a seguinte forma :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \qquad (10)$$

fazendo $\sum_{i=1}^{n} p_i = N$, teremos

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i d_i^2}{N}} \qquad (11)$$

Exemplo 6

Seja a tabela abaixo, contendo valores isolados com pesos diferentes :

Notas	P
19	1
20	2
21	5
22	8
23	6
24	2
25	1
TOTAL	25

Arbitramos então, um valor qualquer para a média, o qual designamos por x_o ; no caso, temos $x_o = 22$.

Calcularemos os desvios em relação à média arbitrada, ponderamos esses desvios pelos pesos e ponderamos também os pesos pelos quadrados dos desvios. Encontramos a seguinte tabela, no final:

X	P_i	$d_i = X_i - \bar{X}_o$	$P_i d_i$	$P_i d_i^2$
19	1	-3	-3	9
20	2	-2	-4	8
21	5	-1	-5	5
22	8	-	-	-
23	6	1	6	6
24	2	2	4	8
25	1	3	3	9
$\sum$	25	-	1	45

Aplicando-se a fórmula do desvio-padrão :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{45}{25} - \left(\frac{1}{25}\right)^2} = \sqrt{1{,}8 - (0{,}04)^2}$$

$$S = \sqrt{1{,}8 - 0{,}0016} = \sqrt{1{,}7984}$$

$$S = 1{,}34$$

Se quisermos usar uma média arbitrária, aplicaremos a seguinte fórmula :

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2} \qquad (13)$$

Como nas distribuições de frequência, podemos trabalhar com os "desvios reduzidos" (d'), a fórmula do desvio-padrão, quando assim procedemos, fica desta maneira :

$$S = i \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2} \qquad (14)$$

Façamos o cálculo do desvio-padrão, usando os dois processos.

Exemplo 7

Seja a seguinte distribuição de frequência :

X	f_i
140 - 144	1
145 - 149	3
150 - 154	2
155 - 159	4
$\sum f_i$........	10

Usando o processo longo, temos que calcular os pontos médios para, em seguida, acharmos a média aritmética ; calculados os desvios , nos comportamos como nos exemplos anteriores.

Assim ,

X	f_i	m_i	$f_i m_i$	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
140-144	1	142,5	142,5	-9,5	-9,5	90,25
145-149	3	147,5	442,5	-4,5	-13,5	60,75
150-154	2	152,5	305,0	0,5	1,0	0,50
155-159	4	157,5	630,0	5,5	22,0	121,00
TOTAL..	10	-	1.520,0	-	-	272,50

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i m_i}{N} = \frac{1520}{10} = \underline{152}$$

Aplicando a fórmula (12), teremos

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{272,50}{10}} = \sqrt{27,25}$$

donde

$$S = \underline{5,22}$$

O processo abreviado para o cálculo do desvio padrão consiste, essencialmente, em supor uma média e mais tarde aplicar uma correção para obter o desvio-padrão real ; o processo abreviado economisa tempo e trabalho no tratamento de dados grupados.

Vejamos como se processa o cálculo, utilizando a mesma distribuição :

X	f_i
140 - 144	1
145 - 149	3
150 - 154	2
155 - 159	4
$\sum f_i$	10

Arbitremos como média, o ponto médio da terceira classe

Assim,

$$\bar{x}_0 = 152,5$$

Donde

X	f_i	m_i	d_i	d_i'	$f_i d_i'$	$f_i d_i'^2$
140-144	1	142,5	-10	-2	-2	4
145-149	3	147,5	- 5	-1	-3	3
150-154	2	152,5	-	-	-	-
155-159	4	157,5	5	1	4	4
$\sum$	10	-	-	-	-1	11

Aplicando a fórmula (14), encontraremos

$$S = 5\sqrt{\frac{11}{10} - \left(\frac{-1}{10}\right)^2}$$

$$S = 5\sqrt{1{,}09} \quad \therefore = 5. \quad 1{,}04 \quad \therefore \quad S = 5{,}22$$

2.4.4 Propriedades do desvio-padrão

Propriedade I - o desvio padrão é maior que o desvio médio..

Propriedade II- para dados não agrupados, a soma dos quadrados dos desvios em relação à média aritmética, é menor que a soma dos quadrados dos desvio em relação a outro valor qualquer.

PropriedadeIII- para dados agrupados a soma dos produtos das frequências pelos quadrados dos desvios, em relação à média aritmética, é menor que a soma dos produtos das frequências pelos quadrados dos desvios em relação a outro valor qualquer.

Propriedade IV- o desvio padrão não se altera quando se adiciona a cada valor uma constante.

Se cada resultado de uma distribuição de frequência for aumentado de uma mesma quantidade, o desvio-padrão permanece inalterado. Somar uma constante a cada resultado significa simplesmente deslocar toda a distribuição para mais tantas unidades quantas sejam as da constante. A média é acrescida da constante somada, mas a variabilidade não se altera. O mesmo acontecerá se se subtrair uma constante de cada resultado.

Exemplo 8

Suponhamos os seguintes resultados :

(X)	(d)	(d^2)
9	2	4
8	1	1
7	0	0
6	-1	1
5	-2	4
		10

Tem-se

$$\bar{x} = 7$$

e o desvio-padrão

$$S = \sqrt{\frac{10}{5}} = 1,41$$

Acrescente-se uma constante (k = 5) a cada um dos resultados (x).

(x+5)	(d)	(d^2)
14	2	4
13	1	1
12	0	0
11	-1	1
10	-2	4
60		10

$$\bar{x} = 12 \text{ e } S = 1{,}41$$

<u>Propriedade V</u> - Multiplicando-se cada valor por uma constante o desvio-padrão fica multiplicado pela constante.

<u>Exemplo 9</u>

Suponhamos os resultados abaixo :

(X)	(X . 10)	(d)	(d^2)
9	90	20	400
8	80	10	100
7	70	-	-
6	60	-10	100
5	50	-20	400
			1 000

Com os resultados originais (x) já conhecemos a média aritmética (7) e o desvio-padrão (1,41). Multiplicando-se cada resultado original por uma constante (no caso k = 10) obtemos :

$$\bar{x} = \frac{350}{5} = 70$$

$$S = \sqrt{\frac{1\,000}{5}} \therefore S = \sqrt{200} \therefore S = 14{,}1$$

ambos multiplicados pela constante <u>k = 10</u>

2.4.5 Desvio-padrão de distribuições combinadas

Se dois conjuntos de resultados forem combinados num só, é possível calcular o desvio-padrão da distribuição total usando o desvio-padrão das duas distribuições, através da seguinte fórmula :

$$S = \sqrt{\frac{N_1\left(S_1^2 + d_1^2\right) + N_2\left(S_2^2 + d_2^2\right)}{N}} \quad (15)$$

em que

S_1 = desvio-padrão da distribuição 1

S_2 = desvio-padrão da distribuição 2

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$ combinado

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$ combinado

$N = N_1 + N_2$

Exemplo 10

Suponhamos conhecer de duas classes de alunos os seguintes dados :

	N	$\bar{x}$	S
Classe A	25	80	15
Classe B	75	70	25

Calculando, primeiramente, a média combinada das duas classes :

$$\bar{x} \text{ combinado} = \frac{(25 \times 80) + (75 \times 70)}{100}$$

$$\bar{x} \text{ combinado} = 72{,}50$$

Com o resultado da média combinada, obtém-se os desvios d_1 e d_2 e os seus quadrados respectivos.

$$d_1^2 = (80 - 72,50) \therefore d_1^2 = 56,25$$

$$d_2^2 = (70 - 72,50) \therefore d_2^2 = 6,25$$

Substituindo na fórmula (15) temos

$$S \text{ combinado} = \sqrt{\frac{25(225 + 56,25) + 75(625 + 6,25)}{100}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7031,25 + 47,343,75}{100}} = 23,32$$

A fórmula do desvio-padrão combinado pode abranger mais de duas distribuições componentes .

Generalizando, para n distribuições, teremos

$$S = \sqrt{\frac{N_1 (S_1^2 + d_1^2) + N_2 (S_2^2 + d_2^2) + \ldots + N_n (S_n^2 + d_n^2)}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}} \quad (16$$

Para achar estes valores, adicionamos 1 a cada um dos valores da coluna d_i, isso dá os valores de (d + 1) . Ele vamos ao quadrado estes valores e multiplicamos depois pelas frequências da coluna f_i.

Isto significa que a soma da coluna $f_i\ (d_i + 1)^2$, deverá ser igual à soma da coluna f_i, mais a soma da coluna $f_i d_i^2$, mais duas vêzes a soma da coluna fid. Senão vejamos :

Exemplo 11

Tomando a distribuição do exemplo 7, teremos:

X	f_i	m_i	d_i	d_i'	$f_i d_i'$	$f_i d_i'^2$	$(d_i' + 1)$	$f_i(d_i'+1)$	$f_i(d_i'+1)^2$
140-144	1	142,5	-10	-2	-2	4	-1	-1	1
145-149	3	147,5	- 5	-1	-3	3	-	-	-
150-154	2	152,5	-	-	-	-	1	2	2
155-159	4	157,5	5	1	4	4	2	8	16
$\sum$	10	-	-	-	-1	11	-	-	19

Aplicando-se a fórmula (18) e levando-se em consideração que estamos trabalhando com os desvios reduzidos, temos

$$\sum \left[f_i\ (d_i' + 1)^2 \right] = \sum (f_i d_i'^2) + 2 \sum (f_i d_i') + \sum f_i$$

$$19 = 11 + 2 - 1 + 10$$

$$19 = 11 - 2 + 10$$

$$19 = 19$$

2.4.7. Correção do desvio-padrão para erros de agrupamento

Quando calculamos o desvio-padrão (S) de uma distribuição de valores as frequências de cada intervalo são representadas pelo respectivo ponto médio, conforme foi visto anteriormente. Acontece que os resultados de um intervalo (as frequências de um intervalo) nem sempre se distribuem simètricamente em tôrno do ponto médio ; nos intervalos situados acima da média da distribuição, por exemplo, as frequências tendem mais vêzes a se localizar abaixo do que acima do ponto médio ; enquanto nos intervalos situados abaixo da média os resultados tendem a se localizar acima do ponto médio. Essas tendências opostas cancelam-se quando se calcula a média de todos os intervalos.

Mas o erro de agrupamento resultante aumenta o desvio -padrão em grâu tanto maior quanto mais extensos forem os intervalos e menor o universo (N); para ajustar esse erro de agrupamento usamos frequentemente uma correção chamada correção de Sheppard, cuja fórmula é :

$$Sc = \sqrt{S^2 - \frac{(i)^2}{12}} \quad \text{ou} \qquad (19)$$

$$Sc = \sqrt{S^2 - 0{,}083\ (i)^2} \qquad (20)$$

onde

S = desvio-padrão calculado ;

i = intervalo ;

Sc = desvio-padrão corrigido.

A correção de Sheppard fornece uma aproximação grande do desvio-padrão que seria obtido caso os resultados não fossem agrupados. Essa correção é insignificante quando os intervalos são pequenos, mas pode ser considerável se os intervalos forem grandes.

<u>Exemplo 12</u>

Tomando o desvio-padrão calculado no Exemplo 7, e aplicando-se a correção de Sheppard, obtemos :

$$S_c = \sqrt{s^2 - \frac{i^2}{12}}$$

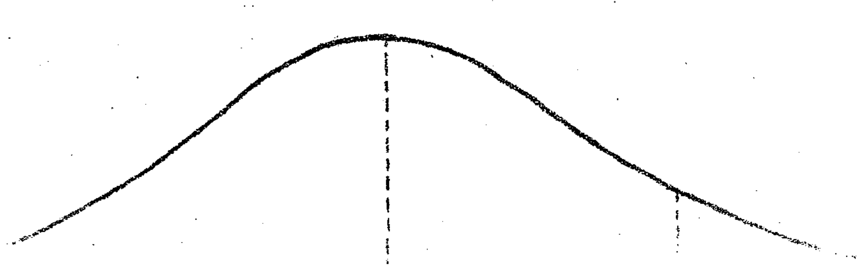
donde

$$S_c = \sqrt{5{,}22^2 - \frac{5^2}{12}}$$

$$S_c = \sqrt{27{,}25 - \frac{25}{12}} = 27{,}25 - 2{,}08 = \underline{\underline{5{,}02}}$$

2.4.8. <u>Tabelas de áreas sob a curva normal</u>

Quando temos uma distribuição normal ou com fraca assimetria, podemos calcular rápidamente a frequência absoluta ou percentual dos elementos situados entre dois pontos quaisquer da distribuição, usando a tabela A(Apêndice), que fornece as partes fracionadas extraídas da área total (tomada como 1,0000) sob a curva normal, correspondentes às distâncias sobre a linha base entre a média e os pontos sucessivos ultrapassados a partir da média, em <u>unidades de desvio-padrão</u>.



Assim, observando a figura 8, encontramos

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} \qquad (21)$$

que mede o desvio em relação à média, em unidades de desvio-padrão- Denominamos de <u>variável reduzida</u> e é uma quantidade abstrata, isto é, independe das unidades usadas.

Quando os desvios em relação à média, forem dados em unidades de desvio-padrão, dizemos que os mesmos estão expressos em <u>unidades reduzidas</u> ou <u>escores reduzidos</u>. Essas grandezas são muito valiosas para a comparação das distribuições.

Entretanto, em vez de S (em relação à média), pode-se empregar o D_q (desvio-quartil) como unidade de medida na determinação de área dentro de determinadas ordenadas da curva normal. Na curva normal designamos, geralmente, o D_q como erro provável ou EP. As relações entre o EP e o S, são as seguintes :

$$EP = 0{,}6745\ S$$
$$S = 1{,}4826\ EP$$

Verificamos, fàcilmente, que S é sempre cerca de 50% maior do que EP. Quando a distribuição é simétrica em tôrno da média ou normal, D_q delimita exatamente 25% dos casos situados imediatamente acima e 25% dos casos situados imediatamente abaixo da mediana.

Na tabela A, podemos verificar que :

0,6745 S ou 1 EP abrange 50%

1,3490 S ou 2 EP abrangem 82,26%

2,6980 S ou 3 EP abrangem 97,70%

2,6980 S ou 4 EP abrangem 99,30%

Podemos dizer que nas distribuições moderadamente desviadas

$$DM = \frac{4}{5} \quad S$$

e

$$Dq = 2/3 \quad S$$

Exemplo 13

Numa distribuição de 450 elementos cuja média é 60 anos e o desvio padrão é 6,5 anos, calcular :

a) a percentagem dos que estão situados entre $\pm$ 1S
b) a percentagem dos que estão situados entre $\pm$ 2S
c) a percentagem dos que estão situados entre $\pm$ 3S
d) os limites que incluem os 60% centrais da distribuição
e) os limites que incluem os 20% mais baixos
f) a percentagem dos situados entre 62 e 70.
g) a percentagem dos situados entre 56 e 75
h) a frequência entre $\pm$ 1,45 S
i) a frequência entre - 0,52 S e 1,78 S
j) a frequência acima de 1,78 S

Solução :

a) fazendo a representação gráfica para melhor visualização, obteremos a fig. 1, abaixo :

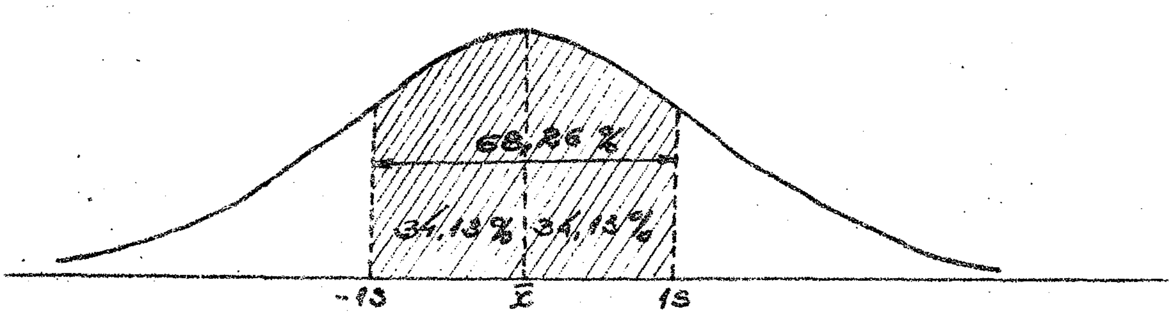


Fig. 1

Procurando na tabela A a área correspondente a 1 S, encontramos 0,3413 ou 34,13%. Uma vez que a curva é bilateralmente simétrica, os lançamentos tanto podem ser aplicados à distâncias, em termos de S, medidas na direção positiva (para a direita), como na direção negativa (para a esquerda).

Assim, entre

$\overline{x} \pm$ 1 S encontramos 68,26% da distribuição

b) Da mesma forma que o ítem anterior, podemos, calcular a percentagem dos que estão compreendidos entre a média e $\pm$ 2 S . Assim, a figura 2, mostra que 95,44% estão entre $\overline{x} \pm$ 2 S, o que poderá ser compreendido lendo na tabela A.

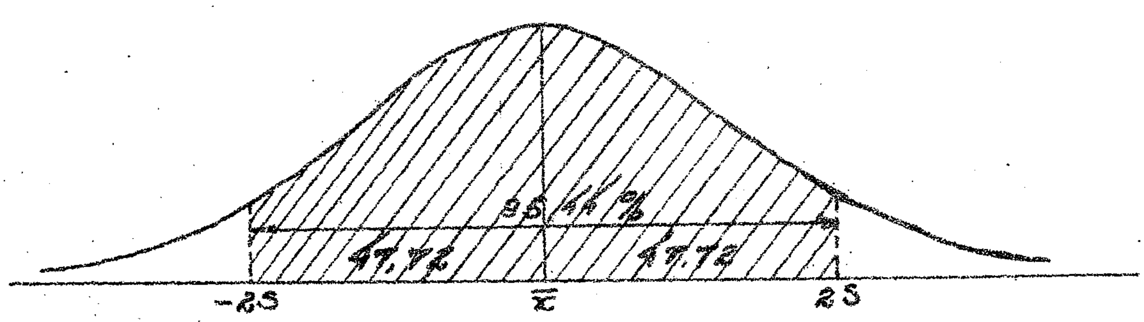


Fig: 2

c) Idênticamente, podemos calcular a percentagem dos que estão compreendidos entre a média e $\pm$ 3S. A figura 3, mostra que 99,74% do total da distribuição estão situados entre $\overline{x} \pm 3S$:

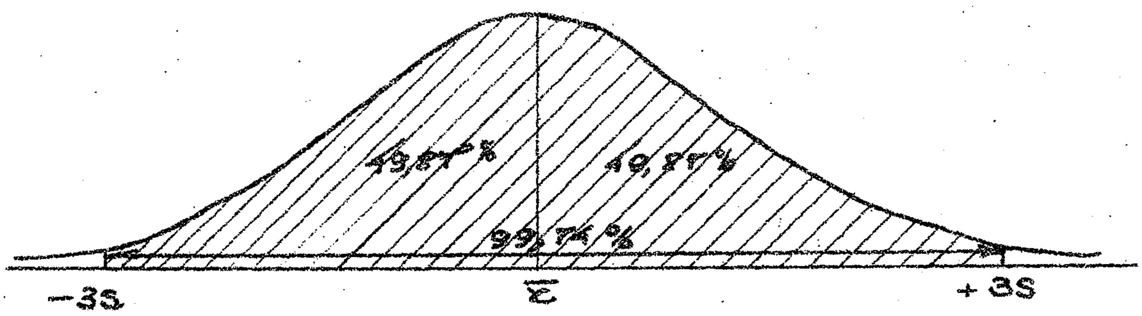


Fig 3

d) Quando pedimos os 60% centrais estamos querendo dizer que existem 30% à direita da média e 30% à esquerda, como mostra a figura 4, abaixo :

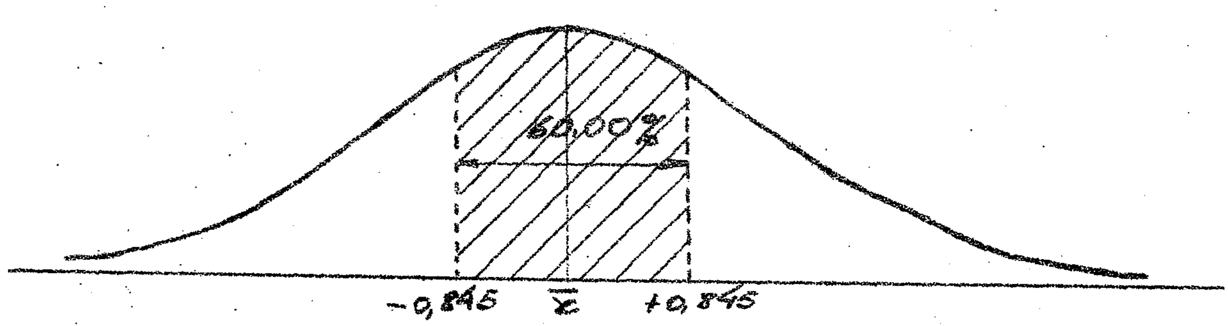


Fig 4

Procurando na tabela, o valor que mais se aproxima de 30% (ou 0,3000), encontramos

$$0{,}84S = 0{,}2995 \quad \text{ou}$$

$$0{,}84S = 29{,}95\ \%$$

Sempre procuramos o valor que mais se aproxima <u>por falta</u> .

Sendo $S = 6{,}5$ anos, temos que

$$0{,}84S = 0{,}84 \times 6{,}5 = 5{,}46$$

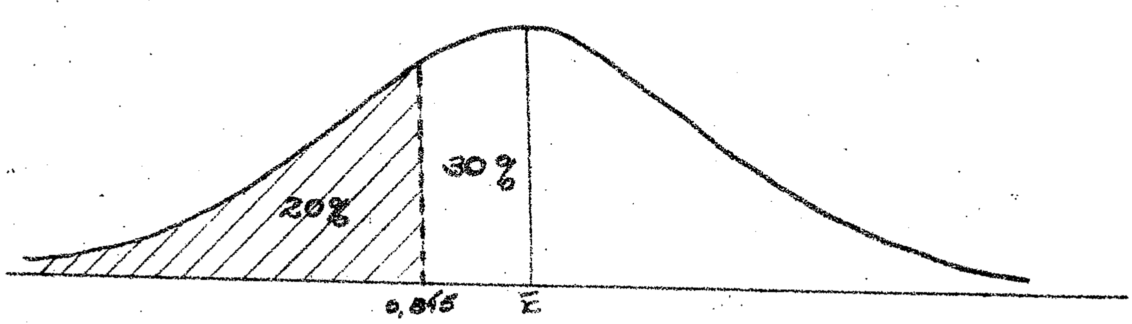
Assim, os limites que incluem os 60% centrais da distribuição, são

$$\overline{X} - 0{,}84S = 60 - 5{,}46 = 54{,}54 \text{ anos}$$

$$\overline{X} + 0{,}84S = 60 + 5{,}46 = 65{,}46 \text{ anos}$$

Entre 54,54 e 65,46 anos estão 60% da distribuição.

e) Para acharmos os limites que incluem os 20% mais baixos, vejamos a figura 5 :



Sabemos que 30% estão situados entre $\bar{x}$ - 0,84S ($\bar{x}$ + 0,84S também daria 30%, mas o problema quer os 20% mais baixos). Assim, os 20% mais baixos estão entre

$$\bar{x} - 3S \quad e \quad \bar{x} - 0{,}84S$$

Assim

$$60 - 3 \times 6{,}5 \quad e \quad 60 - 0{,}84 \times 6{,}5$$

$$60 - 19{,}5 \quad e \quad 60 - 5{,}46$$

Entre 40,50 e 54,54 anos estão os limites que incluem os 20% mais baixos.

f) Observando a figura 6, vemos que necessitamos encontrar as distâncias entre 62 e a média e 70 e a média, em unidades de desvio-padrão.

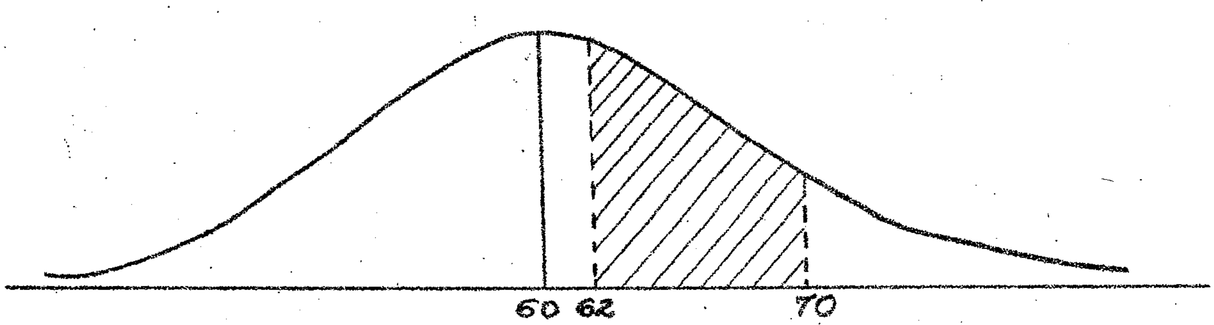


Fig 6

Assim

$$\frac{62 - 60}{6,5} = \frac{2}{6,5} = 0,31S$$

e

$$\frac{70 - 60}{6,5} = \frac{10}{6,5} = 1,54S$$

Temos que, manuseando a Tabela A

$$1,54S = 43,82\ \%$$

$$0,31S = 12,17\%$$

Entre 62 e 70 anos, encontramos

43,82 - 12,17 = 31,65% da distribuição de frequência estudada.

g) pela figura 7, abaixo, fàcilmente encontramos a solução do problema.

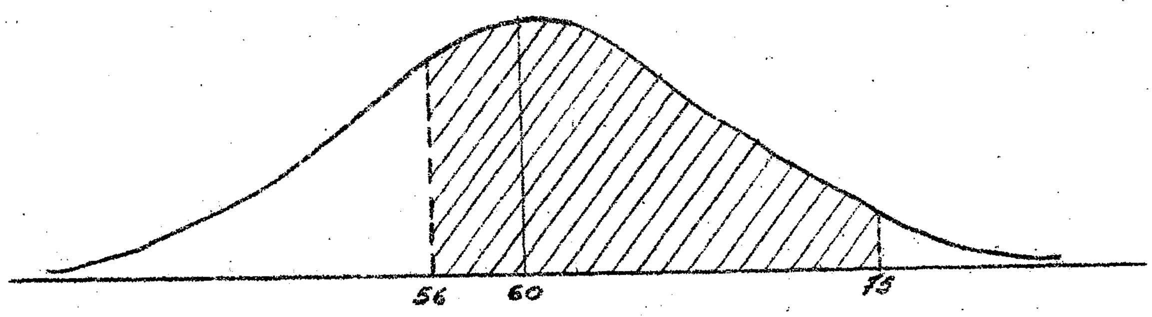


Fig 7

Assim, calculando as distâncias em unidades de S,

$$\frac{60 - 56}{6,5} = \frac{4}{6,5} = 0,61S$$

$$\frac{75 - 60}{6,5} = \frac{15}{6,5} = 2,31S$$

$$0,61S = 22,91\%$$

$$2,31S = \underline{48,96\ \%}$$

$$71,87\ \%$$

Entre 56 e 75 anos estão situados 71,87% do total da distribuição.

h) A figura nos mostra claramente a área solicitada neste item do problema. Basta recorrer a Tabela A.

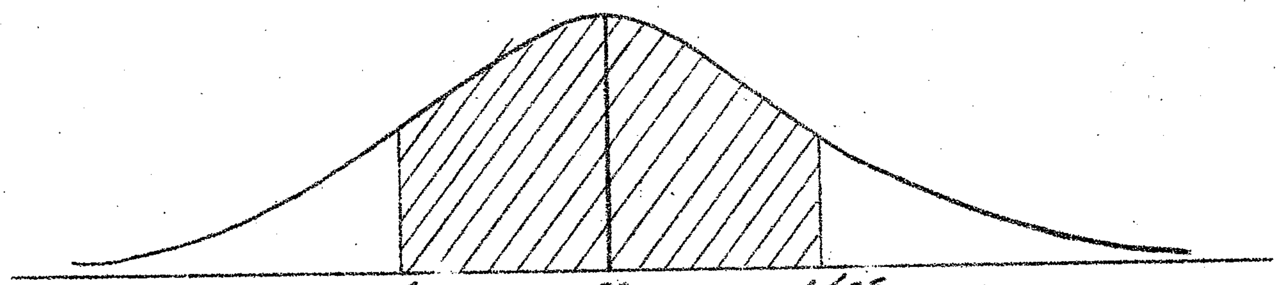


Fig 8

14,5S = 42,65 %

$\pm$ 1,45S = 2 x 42,65

$\pm$ 1,45 S = 85,30%

i) Aqui, além de encontrarmos o percentual, devemos calcular a correspondente frequência absoluta. Assim, a figura 9 nos mostra o solicitado

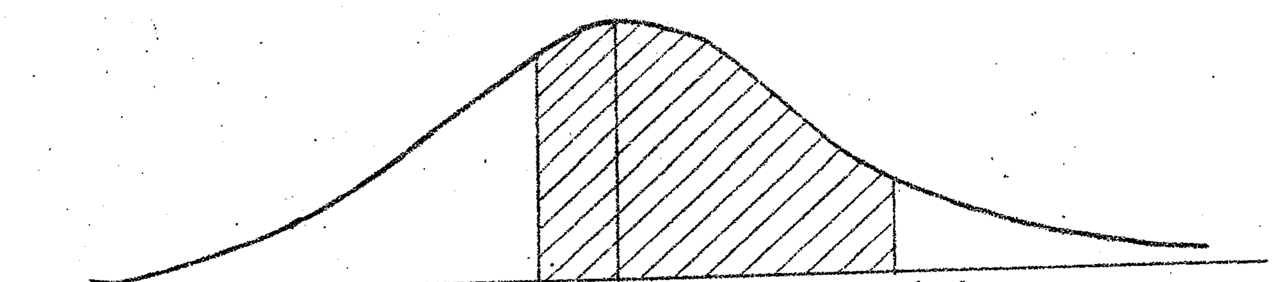


Fig 9

Recorrendo à tabela A, encontramos

0,52 S = 19,85

1,78 S = 46,25

A percentagem entre - 0,525 e 1,785 é de

66,10%

Calculando 66,10% do total de frequência (450 elementos),enc ontramos

297,45 $\cong$ 297

Temos então que 297 elementos estão situados entre

- 052S e 1,78S

j) No problema anterior, verificamos que 1,78S é igual a 46,25 %. Como o ítem pede a frequência acima de 1,78S , podemos observar a solução do problema na figura 10, abaixo :

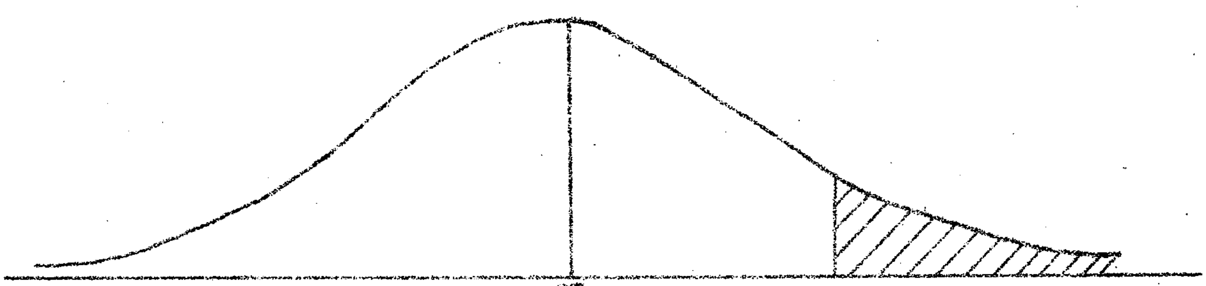


Fig 10

Se 1,78 S = 46,25%, a percentagem situada acima de 1,78S será igual a

$$50 - 46,25 = 3,75\%$$

Estão acima de 1,78 S

$$16,8 \cong 17 \text{ elementos}$$

2.5 Variância

Quando trabalhamos com um certo rigor de análise estatística fazemos grande uso do que é chamado a VARIÂNCIA de uma distribuição, a qual é o quadrado do desvio-padrão. Representando-a pela letra "v" minúscula, pode defini-la como :

$$v = S^2$$

Sendo possível combinar várias distribuições, achando-se a média aritmética com base nas médias aritméticas dos grupos primitivos, também é possível computar-se a variância de uma série de grupos, com base nas variâncias dos grupos.

Suponhamos ser N_1 o número de têrmos do primeiro grupo ; N_2 , o número de têrmos do segundo grupo e N o número de têrmos da série. De tal modo que :

$$N = N_1 + N_2$$

Suponhamos ser d_1 a diferença entre a média aritmética do primeiro grupo ($\overline{x}_1$) e a média aritmética dos grupos combinados ($\overline{x}$) ; então

$$d_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}$$

Da mesma maneira

$$d_2 = \overline{x}_2 - \overline{x}$$

Temos então a equação

$$v = \frac{N_1v_1 + N_2v_2 + N_1d_1^2 + N_2d_2^2}{N} \qquad (22)$$

em que v_1 e v_2, são, respectivamente, as variâncias do primeiro e do segundo grupo.

Assim, a variância da série é a média aritmética ponderada das variâncias dos grupos, mais a média aritmética ponderada do quadrado das diferenças entre as médias dos grupos e a da série.

3. MEDIDAS DE VARIABILIDADE RELATIVA :

As medidas relativas de dispersão são sempre dadas em têrmos de percentagem da medida de dispersão em relação à medida de tendência central.

São as principais medidas de variabilidade .

3.1. Desvio quartil reduzido
3.2. Coeficiente de variação
3.2.1. Coeficiente de variação de Pearson
3.2.2. Coeficiente de variação de Thorndike

3.1. <u>Desvio quartil reduzido</u> - é a relação entre o desvio quartil e a mediana .

$$D_{qr} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{MD}$$

donde

$$D_{qr} = \frac{Q_3 - Q_1}{2 \ Md} \qquad (23)$$

3.2 <u>Coeficiente de variação</u> - Uma estatística bastante útil para tais confrontos consiste no coeficiente de variação, também chamado coeficiente de variação relativa, ou CV

O coeficiente de variação fornece a percentagem do desvio-padrão sobre a média da distribuição ou do desvio - padrão sôbre a mediana - tratando-se pois, de uma RAZÃO que é independente das unidades de medida.

O coeficiente de variação é usado em escalas em que as unidades são iguais e em que existe um ZERO real ou ponto de referência.

Frequentemente, usamos medidas relativas de dispersão quando :

a) As unidades de escala são desiguais.-

Suponhamos uma sala de aula, composta de 50 alunos, possuidores de uma estatura média de 45 polegadas, com um desvio-padrão de 2,5 polegadas, com um pêso médio de 50 kg,com um desvio-padrão de 6 kg. Lògicamente não seria possível comparar diretamente polegadas e quilos sendo possível, no entanto, comparar a variabilidade relativa das duas distribuições em termos do coeficiente de variação.

Assim sendo,

$$CV_1 = \frac{100 \times 2,5}{45} \therefore CV_1 = 5,6\%$$

$$CV_2 = \frac{100 \times 6}{50} \therefore CV_2 = 12\%$$

donde concluimos que os meninos são duas vezes mais variáveis quanto ao peso do que quanto à altura.

b) Quando as médias são desiguais, embora as unidades de escala sejam iguais.

Suponhamos que dispomos dos seguintes dados sobre a altura de um grupo de meninos e de um grupo de homens :

Grupos	$\bar{X}$	S	CV
Meninos	50 cm	6	12%
Meninas	160 cm	16	10%

Em têrmos dos respectivos desvios-padrão, os homens são tres vezes mais variáveis do que os meninos, mas em relação as respectivas médias, os homens e os meninos apresentam variação quase igual.

3.2.1. Coeficiente de variação de Pearson

O coeficiente de variação de Pearson é a relação per centual entre o desvio-padrão e a média aritmética.

Ou seja:

$$CV_p = \frac{100\ S}{\bar{x}} \qquad (24)$$

3.2.2. Coeficiente de variação de Thorndike

Também podemos usar o coeficiente de variação de Thorndike que é a relação percentual entre o desvio-médio e a mediana; Assim :

$$CV_t = \frac{100\ DM}{md} \qquad (25)$$

4. Emprego das Diversas Medidas de Variabilidade

4.1 Usar o intervalo total :

a) quando os dados são muito raros ou demasiado esparsos para justificar o cálculo de uma medida precisa de variabilidade ;

b) quando apenas o conhecimento dos resultados extremos ou da distribuição total for necessário.

4.2 Usar o desvio-quartil (D_q)

a) quando a mediana for a medida da tendência cen tral;

b) quando houver resultados esparsos ou extremos capazes de influenciar desproporcionalmente o desvio-padrão ;

c) quando a concentração em tôrno da mediana - 50% dos casos situados no meio da distribuição - for de interêsse primordial.

4.3 Usar o desvio-médio (DM) :

a) quando desejamos ponderar todos os desvios em relação à média segundo o respectivo tamanho ;

b) quando os desvio extremos influenciarem indevidamente o desvio-padrão.

4.4. Usar o desvio-padrão (S) :

a) quando procuramos uma estatística que se revista de um máximo de estabilidade ;

b) quando os desvios extremos puderem exercer um efeito proporcionalmente maior sôbre a variabilidade ;

c) quando tiverem de ser calculados posteriormente coeficientes de correlação e outras estatísticas.

FAG/drc

EDUCAÇÃO NOS ESTADOS UNIDOS E NO BRASIL

(IMPRESSÕES DE UMA VIAGEM) (*)

Carlos Frederico Maciel

Em outubro do ano passado, eu tive que dar uma porção de aulas extra e antecipar alguns exercícios escolares, porque iria à California, em novembro. Na volta minhas alunas me faziam as perguntas costumeiras: se eu gostei, o que vi, se tem o que aprender, etc. Como já não havia mais aulas deixei de fazer-lhes, então, um relato a que elas tinham direito. Esse o motivo de ter aceito o honroso convite que me fez o Diretor desta Faculdade de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, para dar esta aula inaugural (1).

Devo começar pela pergunta mais preliminar e banal que, ao mesmo tempo, me dá oportunidade para uma explicação de ordem pessoal. Se gostei? Gostei e muito. Alguns amigos surpreenderam-se com isso porque sabiam que eu recusara oportunidades anteriores de ir aos Estados Unidos e interpretaram que durara pouco minha possível idiossincrasia contra o país. Acontece que eu não a tinha. O que me fazia resistir à viagem era antes, além de questão temperamental, alguma dose de quixotesco protesto contra o que eventualmente constitúi, como sub-produto, um processo de compra de consciência, da parte do governo americano, através dessa sistemática e cuidadosa persistência em levar tudo quanto é brasileiro, que esteja em algum posto-chave, para importar alguma influência cultural. Acabei cedendo também (2).

Acho que não se pode deixar de gostar da California, já por sua beleza natural e seu céu "cor de maio", já por seu muito alto padrão de civilização, sendo, como é, talvez o Estado mais rico do país mais rico do mundo. Além do mais a California é hoje um dos focos de uma possível

(*) Aula inaugural na Faculdade de Educação da UFPe., em 06-03-1972.

(1) Tenho, assim, um pretexto para fazer o convencional relatório de viagem que, por sua vez, me permite desincumbir-me do agradável dever de agradecer e dar testemunho da perfeita cortezia com que nos cumularam os patrocinadores de nossa estada em San Diego e na California em geral, muitos deles bons amigos do Brasil onde já estiveram servindo.

(2) Eu tenho medo de engrossar a lista, na área da educação, das pessoas que dizem: "eu vi nos Estados Unidos..."
Por outro lado, a gente tem a impressão de que é um perigo mandar certas pessoas aos Estados Unidos. Eles vão, passam tres meses, na volta introduzem uma reforma do ensino !

revolução social que está começando segundo Galbraiht, Brzezinski (3), e que também enxerga o polemista francês J. Revel, quando vê na contestação que se desenvolve na California e em New York, mais gravidade do que nos "ismos" francêses. O protesto, a crítica, a revisão que se desenvolve, hoje, em certos grupos americanos, entre êles os estudantes da California, nos dispensam, aliás, da preocupação que parece necessária a certas pessoas de apontar traços negativos da civilização que os americanos criaram e estão exportando.

A propósito, essa preocupação de exorcismo parecia-me, por vêzes, estar presente em certa pressurosidade com que alguns brasileiros aproveitavam oportunidades de retificar algum ponto de vista acerca de algum traço negativo americano ou, ao contrário, de lembrar que aqui no Brasil também tem isso ou aquilo. Por exemplo, é pacífico que o Brasil tem uma extraordinária superioridade sobre os Estados Unidos no que diz respeito ao problema racial. Mas o que me parece é que o ponto que parecia importante tentar observar,(nós estávamos lá como observadores)não era que lá existe ainda a segregação, ou a discriminação, por vêzes o ódio. A nós brasileiros, em função do Brasil, parece-me que era mais importante meditar que no Brasil ainda existe preconceito racial, por vêzes forte em São Paulo, por exemplo. Parece-me que mais honesto do que a propaganda, tranquilizadora de nossa consciência, à custa da crise de consciência americana,era tentar explicar, como tentei a fazê-lo a alguns estudantes, o grau da diferença entre nós e eles. É fácil ficar "de cima", no caso, mas eu creio que aos brasileiros não faria mal pensar um pouco sobre a lentidão da ascensão social dos pretos no Brasil, sobre os nossos modismos linguísticos que refletem preconceito e um pouco sobre o que nos aconteceria se os pretos começassem a nos incomodar com sua ascenção e ofensiva como já incomodam lá.

Não aceito a tese que ouvi certa vez sustentada por Bob Kennedy, para proveito dêles, de que o negro no Brasil está como nos Estados Unidos porque só brilham em alguns setores marginais como o futebol (e lá o box). Não. É muito diferente. Mas o que eu também não julgo satisfatório é que o brasileiro, em viagem de observação, apenas aproveita para "tirar uma lasquinha".

Demorei-me nesse assunto, que está fora de meu objeto, apenas para dar um exemplo do tipo de controvérsia (réplicas e tréplicas) a que a gente pode se entregar, como vou fazê-lo algumas vêzes, a propósito dos estereótipos dos brasileiros nos Estados Unidos.

Voltando às perguntas costumeiras. O que vi? se tem o que aprender? São perguntas que merecem uma resposta nuançada. É claro que em

(3) Brzezinski é entusiástico: "o mundo está em véspera de uma transformação mais dramática... do que a causada pela revolução franceza ou bolchevista" e lá pelo ano 2.000, diz êle, Robespierr e Lenine parecerão reformistas moderados.
Cf. Brzezinski - América, Laboratório do Mundo; editora Artenova,Rio/71

uma viagem de curta duração não se vê muita coisa, se não aquilo que de certa maneira já se sabia. Esse é mesmo um dos problemas que se tem numa caravana: quem vai com muito pouco "background" de leitura, de informação sôbre o sistema de educação americano, não vai lucrar muito de uma viagem rápida, nem vai contribuir muito para que o grupo possa aprofundar um pouco mais. De modo que eu não tenho a menor ilusão de que tenha podido ver muita coisa além do que, de certo modo, nós procuramos saber aqui mesmo(4) Há, entretanto, aquela diferença inefável e misteriosa, resultante da presença pessoal.

É evidente que a gente tem o que aprender e que traz alguma coisa. Mas não de uma maneira direta e literal. Creio que é esse o segundo aspecto - ao lado do já apontado da razão direta entre a riqueza das respostas que se obtem e a riqueza das perguntas que se leva - a observar sôbre o que a gente pode aproveitar. O que eu quero dizer é que há uma tendência, que é uma ingenuidade crítica, para algumas pessoas quererem obter respostas diretas para perguntas diretamente formuladas em têrmos brasileiros. E daí por vêzes uma impressão de que os americanos não sabiam ou não queriam responder à questão simplesmente êles não podiam. Porque talvez a pergunta, literalmente, não cabia no quadro de referência dêles. Não se pode perguntar a um inglês, por exemplo, qual a regra do uso do pronome mesoclítico em inglês, porque simplesmente não existe pronome mesoclítico em inglês. E assim é a própria pergunta que não tem sentido, ou pelo menos não tem sentido unívoco.

Por trás do problema da tradução do idioma, no sentido imediato do têrmo idioma, havia o problema de uma tradução do idioma mental ou do contexto subjacente à pergunta. Nesse sentido às vêzes parecia-me que teria sido necessário que alguém fizesse a tradução das perguntas (essa segunda tradução) para os americanos e alguém fizesse uma tradução das respostas, que há o perigo de serem transplantada gerando falácias (5).

(4)
Assisti certa vez dois intelectuais da terra, discutindo sôbre política de Portugal. No fim um fulminou o outro com o argumento de que estiveram em Portugal quinze dias atrás e o outro lá estivera há mais de um ano.

(5)
Para dar um exemplo irônico daquilo me refiro quando falo de uma segunda tradução, estou a lembrar-me de que, segundo o professor Agnelo Viana, a orientação educacional, no Brasil, nasceu de um êrro de tradução, aliás muito comum: traduziu-se "education" que, em americano, frequentemente, significa "ensino", por "educação" que é algo mais multívico e indecidido.
Observando a dificuldade que às vêzes tinham alguns brasileiros em fazer essa transposição e em libertar-se das conotações típicas do contexto brasileiro, compreendi - foi uma coisa que aprendi - melhor a dificuldade de alguns americanos de sairem de suas perguntinhas irritantes; o que nos libertaria da impressão de estarmos dialogando com uam porta. Freqüentemente me inclinei a pensar que os peritos internacionais - e não só americanos - que aqui vêm, pertencem ao 5º time. O 1º time fica lá mesmo, o 2º está na Europa, o 3º na Asia conflituosa e o 4º e o 5º infiltram alguns elementos aqui na América Latina e pelos quintais da América Central.

Tomemos o caso do planejamento para começar a sequenciar algumas observações. Eu quase diria que, tomado no sentido literal e no nível em que se pode penetrar numa curta visita, é um dos setores onde "não se tem muito o que ver". Os americanos não têm planejamento no sentido em que aqui no Brasil esse têrmo vinha sendo trabalhado nas assessorias do Ministério ou das Secretarias de Educação. O "planning" dêles é algo diferente: é mais micro-social, a nível local e individual de uma escola e, ao mesmo tempo, algo muito mais refinado, mais pormenorizado, enquanto o nosso é algo mais no sentido macro-social, relacionado a expansão do sistema, sob um "pathos" de emergência. Esse tipo, conceito e uso do têrmo planejamento nós o encontramos muito mais nos trabalhos da UNESCO, justamente porque relacionados com a problemática dos países sub-desenvolvidos (6).

A razão é justamente esta: que eles, nos Estados Unidos, estão além das metas de escolarização. Não têm problemas de "expansão de escolaridade", pois que "agora que conseguimos educação para todos a tarefa é buscar a educação para cada um" (7).

Os problemas de chão ou de "pés na terra" que, para nós, são básicos (ter as escolas, ter professores titulados; ter dinheiro para o custeio, etc.) não o são para eles. Os problemas que os animam são problemas especiais e até mesmo de detalhe (que não significa irrelevância : são os detalhes que definem um padrão de acabamento (8) e de refinamento) e, enfim, tudo quanto é aspecto qualitativo.

De modo geral, já tendo a escola, o professor e o livro (por vêzes tem-se a impressão de que há um esbanjamento tipo "sociedade de consumo"), o americano entra numa fase crítica: quer saber qual é a eficácia interna e externa da escola, quer o contrôle de qualidade do que a escola produz, quer medir a escola. Daí o sucesso que parece estar encontrando o "approach" da "accountability", a idéia de um contrato entre o aluno e a escola, em que a escola tem que vender um serviço, com rendimento comprovado (9).

(6) Por isso, do tempo em que participei da EPEM (Equipe de Planejamento de Ensino Médio) guardei a impressão de que alguns dos que nos vinham dar assistência em "planning of education" acabavam, por sua vez, aprendendo conosco alguma coisa de planejamento.

(7) Cf. John Pfeiffer - New look at education, Odissey Press, 1968, prefácio

(8) Às vêzes um brasileiro defendia-se: "tudo que eles têm, nós temos". É claro. Mas a questão é que o telefone "sempre" toca, a torneira de água quente sai água quente, e assim por diante. Esses detalhes é que dão o grau do confôrto.

(9) Até certo ponto isso nos faz lembrar nos nossos "cursinhos" pré-vestibulares. Eles quereriam vender e os alunos comprar sua "habilitação". Embora talvez fôsse mais exato, como descrição do comercialismo, fazer do comprar e vender adestramento no teste para ingresso na universidade, o ponto aqui, que representa uma das explicações do fenômeno, é que algo concreto e palpável em jogo, o que permite competitividade e confere "testabilidade" prática ao que é oferecido pela escola.

Quer-se medir a "performance" do sistema escolar, seus níveis de desempenho, em função do seu maior ou menor custo, e outros fatores e alternativas, em vez de continuar simplesmente a dar dinheiro para a educação, na base da confiança, da generosidade. Exemplo disso é o "Jardstick Project" (projeto padrão de medida), que se desenvolve em Cleveland.

Por isso parece que as respostas que êles davam aos brasileiros que indagavam, sobre a clássica questão dos "planos de aplicação de recursos do PNE" acerca dos "critérios de localização e construção de Escolas", parecia, a estes, insatisfatórias. É que a construção da escola (para nós um problema fundamental, relacionado com recursos globais), lá é menos relevante.

Primeiramente o problema lá é sempre de construir uma escola maior ou melhor, ou de redistribuir a população escolar, e nunca pròpriamente o problema de construir uma escola onde não existe escola. Porque, por definição, todo distrito sempre tem uma escola, construida e mantida, para a população do distrito, com os recursos do distrito.

Por outro lado é uma questão local, que resolve-se para cada escola individual, no âmbito de um distrito. Totalmente descentralizado.

Os Estados Unidos foram originalmente e tradicionalmente muito mais uma federação do que o Brasil. As nações anglo-germânicas têm, é um lugar-comum, essa marca de localismo e de grupos, o estilo de baixo para cima, do singular para o geral, correlato com a propensão ao empirismo e ao indutivismo. Enquanto as nações latinas, tìpicamente a França, são organizadas cartesianamente, ideológico-dedutivamente, centralìsticamente. Os Estados Unidos sempre foram muito mais o que o nome diz (10), do que o Brasil terá sido, em qualquer tempo e sobretudo agora, em não é mais nem no nome, "estados unidos" do Brasil. E, de acordo com um princípio clássico, que se tentou incorporar ao Brasil, mas nunca aqui deitou raízes profundas, aquilo que a Constituição não atribuiu expressamente à Federação, cabe, por si mesmo, aos Estados. E como a Constituição nada disse sobre a educação, a educação ficou definitiva, nos Estados Unidos, como competência e prerrogativa dos Estados. E, por sua vez, os Estados delegaram essa competência aos "counties".

Por isso é que eles não desenvolveram tanto o "planning" na direção do nosso "planejamento" (que seria um equacionamento macroscópico do problema da escolarização, racionalizador do processo executivo da administração superior, com um enfoque sócio-econômico e político), e sim

(10) Há quem ache que só recentemente o americano superou o seu provincianismo. É o que sugere, embora de um outro ponto de vista, Daniel Bell, quando diz: "contudo mais estranho talvez é o fato de que somente em décadas recentes os Estados Unidos passaram de ser uma nação para tornar-se uma sociedade nacional".
Cf. D. Bell - The Reforming of general education, Anchor Books, N.Y., 1968, p. 70.

muito mais as técnicas de gerência de programas e projetos, para vender coisas específicas, encomendar coisas determinadas e oferecer ajudas particulares. O que também já chegou aqui no Brasil; mas nem sempre se ajusta completamente bem ou é o melhor expediente para contribuir para o planejamento naquele outro sentido. Na verdade talvez fôsse um modêlo alternativo (11).

Seja como fôr, é o poder local, com o dinheiro local, quem decide da educação. Com efeito, como é sabido, o sistema americano é ou era bàsicamente localista e a unidade de tudo é o distrito escolar, uma sub-divisão do "county" (12). Disse "era" porque o caso dos distritos nos conduz a uma possível radical revolução que estará a ocorrer na administração escolar americana.

Com efeito em 1940, quando o sistema ainda estava estável, o número de distritos era de 117.108, número que logo depois começou a cair de maneira impressionante.

Distritos Escolares

Ano	1940	número 117.108
	1945	101.382
	1950	83.718
	1955	54.859
	1960	40.520
	1965	26.983
	1968	21.704

Fonte: Anotações de uma conferência

(11) Muito interessante, sob esse aspecto, é o que observa Kerr: "Uma agência federal oferece um projeto. Uma universidade não precisa aceitar. Mas, na prática, acaba aceitando"... E prossegue extraindo a ilusão de que daí "seguem-se certas consequências" da ajuda federal a universidade: "o fato de que são sutís, lentamente cumulativas e sua vez, só faz torná-las mais poderosas". Inclusive alguns professores "tendem a transferir sua identidade e sua lealdade da Universidade para a agência em Washington". Cf. Clarr Kerr - The uses of University, Harvard University Press, 1964, p. 57.
Tive a impressão de que o autor estava se referindo ao que se passa quando chega uma comissão do BID, do BIRD ... ou da USAID. Esta é uma das razões por que nunca me convenci bastante do proveito da ajuda externa, inclusive da USAID que sempre me pareceu mais US do que AID: às vêzes uma ajuda específica, uma quantia particular, acaba perturbando um plano mais geral, criando um quisto, produzindo um cruzamento.
É nisto que o comportamento de projetos, gerências, experiências, soluções peculiares e "estímulos indiretos" me parece, em parte, um modelo alternativo contra a idéia de uma matriz global, um programa definido, uma ação articulada.
Um método que parece ter sido gerado e é muito adequado para a orientação indireta da economia privada ou do setor de produção, não necessariamente precisa ser transposto para o setor socializado dos serviços diretamente fornecidos pelo Estado.

(12) O entendimento do que seja um "county" é básico e é um dos pontos difíceis para os brasileiros. O "county" não se assimila adequadamente ao nosso conceito de "município" e creio que seria bom para ambas as partes, nos casos de equipe mista, que se gastasse um pouco de tempo em fazer a tradução entre as duas coisas, em vez de convenção de traduzirmos as duas palavras.

Hoje o número deve ter caido para cerca de 15.000 distritos apenas. Isso indica a queda da importância do distrito e a perda relativa da fé localista. Não é apenas a queda de número de distritos (através de fusões ou "consolidações") que indicam a virada. É que praticamente todos os programas especiais("career education", "compensatory education" , "advanced placement"..., são inúmeros) são impulsionados por iniciativas federais e estaduais (13).

O ponto mais fantástico é o seguinte:

Todo mundo sabe, de modo geral, que a escola americana é financiada por um sistema de taxas locais de propriedade. Compreender como é isso precisamente e como isso funciona é outro ponto que me parece fundamental. De qualquer maneira, esse tem sido o sistema básico tradicional. De modo sumário, para descrição de um perfil médio, admite-se que o orçamento escolar é composto de uma parcela de apenas 7% de recursos federais, outra de 30% estadual e finalmente de 63% de recursos locais. É evidente que esta infra-estrutura financeira localista é a base para a estrutura pedagógica e administrativa localista. É óbvio também que um tal sistema vai permitir uma grande variedade custos do ensino oferecido, de distrito para distrito. Como ultimamente vem crescendo cada vez mais o impulso para a equalização e a compensação, o sistema, até há pouco tempo inabalável, está agora sendo objeto de ataques.

O surpreendente - para notar até onde a coisa caminhou - é que já se chegou a obter da Suprema Corte Estadual da California um pronunciamento no sentido de que o sistema da taxa local de propriedade não satisfaz ao princípio da igualdade de oportunidades (o per capita para com a educação dos meninos varia). É meridiano que se as coisas caminharem no sentido da transferência da taxa local para o Estado (ou, quem sabe? para a União) isso representará uma transformação "de fond en comble" na educação americana.

Foi aí que eu comecei a maturar - considerando a força da tradição, do contexto americanos, que aqui inexistem - no pouco realismo sociológico, na pouca viabilidade de ocorrer o que prescreve a nossa nova Lei de Educação, quando, ecoando ou importando uma direção americana, prescreve:

"Art. 58

parágrafo único - As providências... visarão à progressiva passagem para a responsabilidade municipal de encargos e serviços de educação, especialmente de 1º grau..."

(13) A multiplicação desses fundos e "grants", dentro de um sistema que é granulado até ao nível do pequeno domínio local e diversificado por mil linhas de ação e para mil objetos, pois não é o americano o estilo de organização por algumas linhas setoriais cartesianamente classificadas; é enorme e desnorteante. Crucker (citado por Brzezinski, op. cit., pág. 219) fala, só para New York, de 170 programas, como mais de 400 verbas distintas, e diz que há dez vêzes mais repartições ocupadas com problemas municipais e mil vêzes mais relatórios agora do que em 1939.

O fato, voltando ao caso, é que aqueles projetos e programas vão minando a zelosa autonomia local (14). Não só no que diz respeito ao número e dimensão das unidades, como ao seu poder financeiro e até em aspectos pedagógicos e didáticos. O que não quer dizer, nem de longe, que o sistema como tal já tenha sido transfigurado. Não; a estrutura fundamental, o ponto de partida, o sistema de referência implícito ainda é descentralizado.

Assim é que a elaboração do currículo está radicada na escola e no distrito. A competência é do Estado e este a delegou ao distrito. O Conselho Federal de Educação, por consequência, não faz currículo. Ele apenas elabora uma política geral de currículo estabelecendo certos mínimos e procurando harmonizar a variedade de iniciativas para atingir uma certa semelhança, determinando certos núcleos. Nesse sentido o Conselho Federal (ou na sua escala, o Estadual) pode exigir que o currículo contenha tais coisas, ele pode dizer "o que", que assunto ou área, deve entrar, de um modo ou de outro, no currículo. Mas não elabora currículo, no sentido de que não pode dizer onde (em que séries), quanto (que carga programática), como aquele assunto geral (saúde, ciência, etc.) deve entrar.

Parece-nos que estamos a ouvir que esses conteúdos "não constituem propriamente o currículo, e sim a matéria-prima a ser trabalhada" no currículo de cada estabelecimento, tal como está dito no relatório Grupo de Trabalho que apresentou o projeto da nova Lei 5692.

Nos Estados Unidos eles têm como ponto de partida, note-se bem, uma situação em que os currículos pertencem à variedade do espontaneismo local e têm que respeitar essa tradição. Nem sempre parece que eles estão muito satisfeitos. Às vêzes dava a impressão que há grupos que querem pressionar por uma maior interferência visando a uma maior homogeinização dos currículos.

Aliás, a propósito de currículo, bem vale um comentário sobre um dos estereótipos dos brasileiros sobre a educação nos Estados Unidos, a que tenho me referido. O estereótipo é que o nosso currículo é rígido e o deles flexível. Como todo estereótipo este contém um tanto de verdadeiro. Com efeito, lá a currículo varia de distrito para distrito, de Estado para Estado e não está organizado segundo o nosso sistema de matérias sequenciadas. Mas, também como todo estereótipo, ele tem uma contrapartida de falsa simplificação. Aqui com efeito o currículo está fixada

(14) Diversas fôrças combinadas e que se recobrem - o esforço pela maior equalização, a preocupação de atender a tudo quanto é "minority", a multiplicação de programas especiais em função do objetivo de dar a educação de cada um ou de promover avanços, a nova exigência de medir a eficácia interna e externa da escola e, finalmente, o progresso do planejamento que anda de par com uma dose de centralização -, tudo converge para abalar a autonomia.
Desde o Elementary and Secondary Education Act de 1965, de Lyndon Johnson a competência federal tornou-se reconhecida de fato, se não de direito. Foi a vitória definitiva do govêrno federal e significou o fim do velho tabú localista.

num diploma de legislação, teoricamente. Mas quando se desce para a prática, ninguém é capaz de assegurar o que está sendo dado ou como está sendo. Ao contrário, na California, o currículo desce à sua pormenorização num sylabus que prevê, semana por semana, o que vai ser dado, com exemplificação do material didático a ser utilizado, etc. Quando se pensa também que há uma bateria de livros obrigatórios e que há testes padronizados que são aplicados a todos os alunos, para aferir sobre o que deve estar sendo dado, então fica-se a pensar se, sob um outro aspecto, não será o currículo deles que, na prática da cobrança da execução, não acaba sendo rígido e o nosso frouxo.

Também não sei, se aqui ou ali, o professor brasileiro não terá, dentro do nosso jeito "négligé" de fazer as coisas, mais liberdade de sair da regra do que seu colega americano. Tenho a impressão, por exemplo, que aqui no Brasil muita professôra primária, quando quiz, introduziu, por conta própria, elementos de educação sexual em sua classe e "não deu nenhum bode" por causa disso. Não estou seguro sobre se lá, a introdução de uma coisa assim não necessitaria de um monte de reuniões de pais e mestres e "boards" e da elaboração do material a ser utilizado, etc. etc.

Talvez pudéssemos dizer que em abstrato e em geral nosso currículo é rígido e uniforme e o deles flexível e diversificado. Mas que, no concreto, o nosso é plástico e o deles minuciosamente executado.

Uma palavra agora sobre o padrão de organização escolar. Como já sabemos o condado é dividido em distritos. Cada distrito se auto-determina quarto ao padrão que vai adotar. Se é um "elementary district", por exemplo, ele poderá ser um K-8, ou um K-6 ou 1-8, conforme ele mantém Kindergarten ou não, e mantém um padrão de escola elementar de 6 ou de 8 "grades". Assim, lá, em cada distrito, há efetivamente, um "nível da série realmente alcançada pela organização escolar em cada sistema" (Art. 76, alinea "a" da Lei 5692 - substituimos a palavra gratuidade pela palavra organização).

Superpostos a estes distritos elementares, há outros distritos que mantém o High School ou somente o Senior High School. A fusão de distritos elementares com esses outros, dá origem a um "unified district" que mantém não somente várias escolas elementares (inclusive pelo fato de que resultam da fusão de vários distritos elementares) mas também até o final do "senior high". Essa é a razão da diminuição do número de distritos. Caminha-se rapidamente para a existência apenas de "unified districts", todos indo "K trough 12") isto é, do jardim até o 12º ano.

Como sabemos, o padrão básico de organização escolar americana foi o 8-4, que consolidou-se entre 1890 e 1910. Havia uma escola primária (ou antes "elementar") de 8 anos, compreendendo, sem divisão expressa, dois ciclos, um o "primário" (as primeiras séries) e outro até as últimas séries. Em seguida vinha a escola secundária de 4 séries.

Dá um total de 12 séries, aparentemente uma a mais do que o sistema 8-3 que a Lei 5692 estabeleceu agora. Os professores de educação comparada e teóricos da organização do ensino no Brasil nem sempre se advertem, quando elaboram quadros comparativos, de que o primeiro grau americano, como o primeiro ano francês, inglês ou alemão, corresponde ao nosso preliminar (crianças de 6 anos).

Por volta de 1920, esse sistema de 8 anos fundamentais, estava sendo substituido. Tornou-se comum o sistema 6-6 ou melhor 6-3-3. Seis anos de "elementary" que corresponderiam mais ou menos ao nosso preliminar até o quinto ano, e depois 3 anos de Junior High e, depois, mais 3 anos de Senior High School. O Junior High ficou assim constituido dos dois últimos anos da primitiva escola elementar e do primeiro ano da escola secundária.

A razão dessa transformação, segundo está em livros como o de Kandel e outros, é que a escola elementar não dava satisfação aos meninos maiores, das duas últimas séries (15).

Por sua vez esse padrão está agora sendo contestado, com o aparecimento de "The emergent middle school" (16) "O desenvolvimento da "Middle School é um dos eventos mais significativos da década dos 60". Diz-nos um autor (17).

O esquema onde aparece a "Middle School" é o esquema 4-4-4 ou mais comumente 5-3-4. Novamente alega-se que a "elementary", com seu teor primário, não está mais satisfazendo ao menino da sexta série (corresponderia à nossa primeira ginasial), que precisa ser acelerada, por exemplo, com a introdução do estudo de língua estrangeira. Diríamos, utilizando a expressão de Reguzzoni, que há uma "secundarização" da última série do primário (18). E, por outro lado, note-se há um retorno da primeira série da antiga escola secundária à "senior high". A razão é a seguinte: a prepa

(15)
De fato, tive oportunidade de visitar uma escola, eu diria arcaica, desse tipo. Uma escola rural, multi-seriada, com os alunos sentados em filas ou "forms" correspondentes aos seus respectivos graus, tal como descreve, por exemplo, Gooddlad.
Cf. The Nongraded elementary school - Hautcourt Brace, N.Y. 1963
A impressão que se tem é que a escola não oferece nada a uns 4 adolescentes que estavam na sala, dois deles namorando-se com os olhos.

(16)
Cf. Alexander e outros - The emergent middle school. Editior Holt, N.Y. 1963.

(17)
De Vita, Pumerantz, Wilklow - The effective middle school, Parker, New York, 1970 p. 25.
Segundo esses autores em 1965-66 havia cerca de 500 middle school e em 1968 o número subiu para 1.100.
Não sei se o movimento é tão importante assim. Nem considero-o de significação tão acentuada ou substancial.

(18)
Cf. Maria Reguzzoni - La reforma de L'enseignement - Aubiér, Paris, 1966
Segundo esse autor, na Alemanha, Itália, Belgica, Holanda, Luxemburgo e França "o nível geral da instrução tende a elevar-se a todo ensino tende a tomar a fisionomia e os métodos característicos da instrução do tipo secundário. Mesmo o ensino do primeiro grau secundariza-se.

ração "acadêmica" ou pré-universitária começa no nono grau. E assim é porque a antiga escola secundária (que ia do nono ao décimo segundo) preparava para o College. De modo que até hoje de alguma maneira os pré-requisitos que o "college", impõe aos seus futuros candidatos recúam tão longe quanto ao nono grau.

Por isso pensam alguns que o nono grau fica melhor no "senior" que no "junior", e que haveria mais proximidade entre o 6º e o 8º grau. A "middle school", dessa forma, destina-se aos "early and pre adolescents", expressamente aos meninos de 11 a 14 anos. Como o nosso ginásio (19).

Seja como fôr, todos vão até o "senior high", pois na Califórnia a obrigatoriedade escolar vai até 16 anos. Nessa altura diversificam-se os que aí encontram sua educação terminal e os que vão continuar em nível superior.

É interessante observar que, apesar do rápido índice de expansão do ensino superior, e não obstante a nótoria e famosa capacidade da escola americana (mesmo quando não se denomina "comprehensive") de ministrar ensino de matérias práticas e/ou técnicas, valendo-se de equipamentos deslumbrantes, encontramos também a mesma preocupação com uma teoria a respeito do desencontro entre a orientação do sistema educacional e o mundo do trabalho. Segundo essa explicação apenas cerca de 12% dos empregos são empregos que exigem formação universitária. Entretanto, nas escolas, cerca de 75% a 80% dos alunos seguem currículos com orientação acadêmica e de "general education", e apenas 20 a 25% seguem uma orientação vocacional. O resultado é que, ao terminarem a escola, 80% iriam disputar acesso ao curso superior e àqueles 12% de ocupações, enquanto muitos e muitos deles não vão seguir esse caminho e, por outro lado, acham-se despreparados para as ocupações.

(19)
Reconheço que a reforma inspirou-se também no modelo soviético e escandinavo, mas é inegável a sensação de que estamos adotando uma coisa que eles estão abandonando.
E é o caso: um conferencista me explicava, em Sacramento, que há uma tendência, a partir ao menos do 5º grau, para substituir, a "self contained class", isto é, a classe que tem um só professor para um ensino "globalizado", por professores mais especializados (o "team teaching" é um desses mecanismos). E quando eu lhe objetava que, no Brasil, muitos defendem a formação de um professor polivalente para evitar que no antigo ginásio os meninos tivessem 7 professores, respondeu-me: "Nós às vêzes pensamos por que é que na Europa e Sul América estão adotando algumas coisas que estamos abandonando".
A propósito, De Vita, Pumerantz e Wilklow, comentando que na "middle school" os alunos têm 9 professores, em vez dos 2 ou 3 da "elementary" sugerem que, de acordo com um dado levantamento, os meninos se sentiam tão bem relacionados com seus professores da "middle" quanto com os da quinta série.
O que parece que há de certo, coisas desse tipo, é que há muito pouco coisa certa. Há muita coisa ainda que pertence à crendice ou ao "folklore" pedagógico, mais matéria de fé que da comprovação.

Daí programas, como o "career education" (20) e outros destinados a incrementar e a melhorar a formação para empregos. E, concomitantemente, uma certa tendência para criticar os programas de "general education", talvez mesmo eliminá-los, deixando apenas ou bem, de um lado, os créditos acadêmicos, ou bem, de outro, as disciplinas vocacionais.

Surpreendeu-me encontrar lá onde não há essa separação, como no Brasil (e em países da Europa), entre uma escola secundária e escolas técnicas, essa mesma indagação e até certa coincidência de números. Também aqui a escola secundária representa ou representou, em anos recentes, cerca de 75% do ensino médio.

Não entrarei nesse difícil assunto. Prefiro caminhar para o término dessas notas (21), anotando o fato já conhecido da extraordinária expansão do terceiro grau nos Estados Unidos, e na Califórnia, em particular.

Na Califórnia temos, em primeiro lugar, a famosa Universidade da Califórnia, mencionada na própria Constituição do Estado e, por isso, dotada de uma autonomia quase soberana, espalhada em nove campuses, o mais famoso dos quais é o de Berkeley e que é, hoje, provavelmente, a maior universidade do mundo (22). A política estabelecida para a universidade é de receber os 12,5% dos melhores alunos das escolas secundárias. E, em parte para atender à necessidade de ter critérios seletivos para execução dessa política que é tão desenvolvido o sistema de pesquisas que permitem comparar o rendimento escolar de aluno por aluno, por assim dizer, de escola por escola, na Califórnia.

Já a política dos State Colleges (entre os quais o San Diego State College, por uma coincidência agradável, transformado em San Diego State University, quando nós estávamos lá) é mais branda. Aceitam os 33% de melhores alunos (23).

(20) O "career education" é um programa que tem um aspecto semelhante ao nosso PIPMO (Programa Intensivo de Preparação de Mão de Obra): procurar levar o aluno a experiências de preparação para o trabalho, fora de escola, diretamente no emprego, fora dos quadros, horários e regras convencionais. É um programa ainda muito incipiente, ao que nos foi dado perceber.

(21) Não pretendi fazer um relato do que tive oportunidade de ver. Recomendo o artigo do professor Itamar Vasconcelos, que fêz o mesmo estágio dois anos antes de mim e que, como sempre, ordena suas anotações precisas. Cf. Itamar Vasconcelos - Alguns Aspectos da Educação na Califórnia, in Estudos Universitários, vol. 10, nº 2, 1970, pág. 95-115.

(22) Ao aluno de Educação Comparada é absolutamente indispensável ler o livro de Clar Kerr - The uses of university, onde ele forjou o conceito já tornado clássico de "multiversitas".

(23) Circula, no Brasil, o lugar comum de que o nosso sistema é seletivo. Se com isso se quer dizer que, como toda e qualquer oferta escassa, o sistema é precedido de uma seleção sócio-econômica de seus usuários, isso é inegável. E até óbvio. Mas, se, ao mesmo tempo, a palavra ambiguamente insinúa que o sistema é seletivo pedagógicamente, isto é, tem mecânismos meritocráticos internos ao ensino, então creio que, no Brasil, não há uma mecânica seletiva como esse exemplo da política universitária mencionada.

Há que mencionar ainda universidades particulares e sobretudo os 30 "junior colleges", domínio em que a Califórnia é pioneira e líder. A disseminação do "junior college" visa dar uma oportunidade de educação de 3º grau aos que não conseguem vencer a barreira seletiva da Universidade e, ao mesmo tempo, dar formação profissional superior curta. Embora este não seja o pressuposto inicial, é possível passar do "Junior College" para o "College", razão pela qual já se nota que o maior afluxo de ingresso nas Universidades não ocorre mais no "freshman", mas no "junior" (24).

Sem referir números, que viriam sobrecarregar essas linhas finais, podemos assinalar que, nos Estados Unidos, o acesso ao ensino superior já venceu a barreira dos 50%, em relação ao grupo etário 18-21 anos. Antes da guerra, cerca de 14%; em 1964, cerca de 40%; em 1970, seguramente mais de 47%, se as previsões não tiverem sido ultrapassadas. Ou seja o crescimento da escolaridade "engole" o deficit a uma razão de 1% ao ano. É aproximadamente o mesmo ritmo em que, no Brasil, nós estávamos, nos últimos anos, vencendo o deficit de "ensino médio", em relação ao grupo11-17 anos.

Dessa forma, apesar da opinião de um Conant que opinou que há provavelmente mais excesso de estudantes superiores do que falta, os Estados Unidos, a Califórnia, em particular, estão atingindo o estágio em que, nos números, e, por consequência, logo depois transpassará para a ideologia, ao menos no nível de "junior college", haverá "ensino superior para todos" (25).

Os Estados Unidos aproximam-se de uma saturação dos escolas. E, então, curioso que, eles por saturação e nós por carência, estejamos convergindo em uma abertura para re-examinarmos o papel, o funcionamento, a importância e mesmo a necessidade da escola (26). Mas é outro assunto muito importante e muito complexo para ser tratado aqui.

Fiz essas duas últimas observações sobre a dialética dos fatos e das idéias porque o fio de minha palestra, como todos perceberam, foi assinalar o vai-e-vem de certos estereótipos e de certos transplantes anacrônicos, e as dificuldades e algumas inconveniências de um regime de importações.

Por outro lado, espero que, tendo relatado algumas de minhas reações de viagem, tenha acabado conseguindo dizer alguma coisa útil sobre a educação no Brasil.

(24) Os quatro anos do "college" denominam-se tradicionalmente: "freshman" (calouro), "sophomore" (o nosso caido em desuso "pé de banca"), "junior" e "senior" (bacharelando).

(25) Um estudo de 1968 prevê para a cidade de New York, em 1975, cem por cento de escolaridade até 22 anos, com um mínimo de 14 anos de curso.

(26) Cf. os artigos importantes e um tanto demagógicos e "ideológicos" de Illich sobre a futilidade das escolas. E também Everet Reimer - School is dead.

oooOOOooo

TELMO FREDERICO MACIEL

INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA INDUTIVA
ELEMENTOS DE PROBABILIDADES

PUBLICAÇÃO DA S.E.P.O.E.N.

NOTAS DE AULAS

DE

ESTATÍSTICA INDUTIVA

PROBABILIDADES

ÍNDICE

oOoOoOoOoOoOoOo

Capítulo I

NOÇÕES DE PROBABILIDADE. PROBABILIDADE E FREQUÊNCIA. POSTULADOS BÁSICOS. TEOREMA DE BAYES.

Teoria das Probabilidades - Trata-se de um modêlo matemático adequado ao estudo de destribuições de frequências correspondentes a fenômenos aleatórios.

Acontecimento aleatório - É todo aquele acontecimento que pode reproduzir-se indefinidamente sem qualquer previsão possivel. Sua constatação corre por conta da observação ou da experimentação - daí decorrendo as expressões observação aleatória e experimento aleatório.

Em toda observação ou experimento aleatório podemos associar a cada um dos acontecimentos A um número P(A) atendendo a um conjunto de postulados básicos, a que chamaremos probabilidade do acontecimento A na observação ou experimento considerado. Taes postulados constituirão a estrutura de um modêlo matemático que se adequado à realidade pode servir de instrumento para investigações a seu respeito. Trata-se de uma definição puramente matemática - daí probabilidade matemática. Definições menos rigorosas podem dar uma idéia mais intuitiva da noção de probabilidade - Definição clássica de Laplace (1812)(Teoria Analítica das probabilidades - Laplace): "Probabilidade de um acontecimento é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis supostos todos igualmente possíveis".

Apresenta-se tautológica(emprêgo do vocábulo:possível) e subjetiva (quando pretende fundamentar-se no "princípio da indiferença" segundo o qual - "sempre que não haja razão para supor que um fato é mais provável que outro, serão elas consideradas igualmente possíveis"). Tal definição fornece um conceito a priori posto que a afirmação de equipossibilidade é prévia à observação ou experimento podendo ou não ser confirmada.

- Definição moderna de Von Mises (1919)(Probabilidade Estatística e Verdade - Von Mises). Probabilidade de um acontecimento,n'um experimento aleatório E,é um número P(A), do qual se aproxima a frequencia relativa do dito acontecimento quando o experimento se repete um número de vezes suficientemente grande."Constata-se uma regularidade estatística no experimento porquanto as

<u>frequências relativas apresentam variações cada vez menores à medida que aumenta o número de vezes que realizamos o experimento</u> . A definição se apoia assim, n'um "<u>princípio empírico</u>". Von Mises supõe que quando o número de repetições do experimento tende para infinito, a frequência relativa tende para um limite a que chama de probabilidade. Para não mesclar, segundo Cramer(Método Matemático de Estatística - Cramer) elementos empíricos e teóricos convém evitar na definição o emprêgo do conceito de limites e referir à "um número de vezes suficientemente grande". Nestes termos a probabilidade se apresenta definida <u>a posteriori</u> como resultado de uma experiência - daí a expressão <u>probabilidade empírica</u>.

<u>NOTA</u> - É interessante anotar desde já que o <u>conceito matemático de limite</u> adquire uma feição especial na Teoria das probabilidades.

Assim as variáveis podem tender para constantes, definidas como seus limites, de um "<u>modo sui generis</u>". Exemplo, demonstra-se (Teorema de Bernoulli) que: fazendo-se provas repetidas de n observações, em condições idênticas, o número de vezes v em que uma prova se repete apresenta-se tal que, com uma probabilidade P tendendo para a unidade ($P \to 1$) as frequências relativas $\frac{v}{n}$ tendem para $p(0 < p < 1)$ quando $n \to \infty$. Há assim algo de novo a atentar no caso em que se venha a definir a probabilidade empírica lançando mão da noção de Teoria dos limites.

<u>TESTE EXPERIMENTAL DO ENLACE ENTRE A NOÇÃO DE PROBABILIDADE E FREQUÊNCIAS RELATIVAS</u>

Lançemos dez dados perfeitos e verifiquemos o número de vezes que ocorre o Az.

Temos 60 casos possiveis e digamos x casos de obtenção do Az.

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{60}$$

Lançemos agora cem dados, depois mil, depois dez mil.

$n = 600$ depois $n = 6.000$ depois $n = 60.000$

Obteremos frações $\frac{y}{600}$, $\frac{z}{6000}$, $\frac{w}{60000}$ convergindo para $\frac{1}{6} \cong 0,17$.

POSTULADOS BÁSICOS DA DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE PROBABILIDADE E APRECIAÇÃO DE PROPRIEDADES CORRELATAS NAS FREQUÊNCIAS RELATIVAS.

Probabilidade de um acontecimento A é um número P(A) atendendo os seguintes postulados.

1º - Os valores da probabilidade variam de 0 a 1. $0 \leq P(A) \leq 1$
Também as frequências relativas não podem ter outros valores que os compreendidos entre 0 e 1.

2º - A probabilidade de que se verifique algum dos acontecimentos incompatíveis: $A_1, A_2 \ldots, A_r$ é igual a soma das probabilidades de que se verifique cada uma delas.
$P(A_1 \text{ ou } A_2 \ldots \text{ ou } A_r) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_r)$.
Chama-se acontecimento soma o acontecimento que consiste na realização de qualquer das alternativas e se representa por $(A_1 + A_2 + \ldots + A_r)$, valendo escrever:
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_r) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_r)$
Também lidando com frequência relativas temos:

$$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_r}{n}$$

3º - A probabilidade de que se verifique um qualquer dentro os acontecimentos possíveis é 1 ou seja a probabilidade de um acontecimento certo é a unidade $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1$.
Também é evidente que a frequência relativa de um acontecimento que sempre se verifica é $\frac{n}{n} = 1$

4º - A probabilidade de que se verifique um acontecimento A_1 juntamente com outro A_2 é igual ao produto da probabilidade de que ocorra A_1 pela probabilidade de que ocorra A_2 uma vez tendo ocorrido A_1.

$$P(A_1 \text{ e } A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1)$$

Chama-se acontecimento produto de dois acontecimentos o que consiste na realização de um e de outro e se representa por $(A_1 \times A_2)$ valendo escrever

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1)$$

$P(A_2/A_1)$ chama-se probabilidade condicionada.

Também tratando com frequência relativas temos

$$\frac{n_{1,2}}{n} = \frac{n_1}{n} \quad \frac{n_{1,2}}{n}$$

Os postulados 2º) e 4º) merecem atenção especial enquanto a êles se ligam as noções de <u>probabilidade total</u> e <u>probabilidade composta</u>.

--- De acôrdo com o postulado 2º) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ e fala-se em <u>probabilidade total</u> de dois acontecimentos <u>incompatíveis</u> - o que se generaliza para n acontecimentos.

Se A_1 e A_2 não se excluem mùtuamente ou seja são compatíveis vem:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \quad A_2)$$

--- De acôrdo com o postulado 4º)

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1)$$

Se A_1 for independente de A_2 tem-se

$$P(A_2/S_1) = P(A_2) \text{ e vem}$$

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$$ e fala-se em <u>probabilidade composta</u>.

Detenhamo-nos na distinção entre incompatibilidade e independência notando que dois acontecimentos independentes podem ou não ser compatíveis enquanto dois acontecimentos incompatíveis não podem ser dependentes.

Ainda por conta dos postulados 2º) e 3º) tem-se :

a) Se $\bar{A}$ é o acontecimento contrário de A, desde que êles se exeluam mùtuamente (são imcompatíveis) e a probabilidade de que se verifique um dos dois é certa vem:

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \therefore \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- é a <u>probabilidade complementar</u>

b) Para o <u>acontecimento impossível</u>, cujo contrário é o certo tem-se

$$P(0 + 1) = P(0) + P(1) = 1$$

Como $P(1) = 1$ então $P(0) = 0$

<u>Alguns exemplos</u>

<u>Probabilidade complementar</u>

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Joga-se um dado. A probabilidade de cair Az é $\frac{1}{6}$. A probabilidade de ocorrer outra face é:

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

<u>Probabilidade total</u>

<u>Acontecimentos incompatíveis</u> $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

- joga-se um dado. A probabilidade de sair o 3 ou o 5 é:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Tira-se uma carta de um baralho. A probabilidade de que seja de espada ou um rei de copas é:

$$\frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{14}{52}$$

<u>Acontecimentos compatíveis</u> $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \times A_2)$

Tiram-se quatro cartas de um baralho. A probabilidade de que se tenha uma carta de espada ou uma figura é:

$$\frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} \quad \text{onde} \quad \left(\frac{3}{52} = \frac{13}{52} \times \frac{3}{13}\right)$$

O termo $\frac{3}{52}$ vem de que, a dama, valete e rei de espada foram contadas cada um duas vezes (como figura e como carta de espada)

<u>Probabilidade composta</u>

<u>Acontecimentos não independentes</u> $P(A_1 \times A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$

Tiram-se sucessivamente duas cartas de um baralho sem que haja reposições depois da primeira tirada.

A probabilidade de sair dois reis é:

$$\frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$$

O segundo fator está condicionado ao fato de que obtido um rei na primeira tirada só restam no jôgo 51 cartas das quais 3 são reis.

<u>Acontecimentos independentes.</u> $P(A_1 \times A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$.

O primeiro rei obtido sendo <u>reposto</u> no baralho temos:

$$\frac{4}{52} \quad \frac{4}{52} = \frac{1}{256}$$

(o mesmo seria obtido se tirassemos dois baralhos retirando uma carta de cada baralho)

PROBABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI - TEOREMA DE BAYES

Dados n acontecimentos se excluindo mùtuamente e ta ao menos um se realize podemos escrever:

$$A_i \times A_j = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

e

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1$$

Seja um outro acontecimento A

Tem-se

$$A = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)A$$

$$= A_1 A + A_2 A + \ldots + A_n A$$

e também

$$(A_i A) \times (A_j A) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

então

$$P(A) = P(A_1 A) + P(A_2 A) + \ldots + P(A_n A)$$

Ora

$$P(A) \; P(A_i/A) = P(A_i A) = P(A_i) \; P(A/A_i)$$

d'onde

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i A)}{P(A)} \quad \frac{P(A_i) \; P(A/A_i)}{P(A)}$$

ou seja

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \; P(A/A_i)}{P(A_1 A) + P(A_2 A) + \ldots + P(A_n A)}$$

ou ainda

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \; P(A/A_i)}{P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n)}$$

é o chamado teorema de Bayes.

Se um acontecimento A foi observado e ocorreu como consequência de um dos acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mùtuamente exclusivos, a probabilidade de se ter verificado o acontecimento causa ou acontecimento antecedente A_i é dado pela expressão acima. As probabilidades $P(A_i)$ e $P(A/A_i)$ são ditas _probabilidades a priori_. As probabilidades $P(A_i/A)$, obtidas pela fórmula deduzida, são ditas _probabilidades a posteriori_ (pressupõem a constatação do acontecimento A).

Exemplo - Temos três escrivaninhas, cada uma com duas gavetas. A escrivaninha E_1 contém em cada gaveta uma moeda de ouro. A escrivaninha E_2 tem numa gaveta uma moeda de ouro e na outra uma moeda de prata. A escrivaninha E_3 tem uma moeda de prata em cada gaveta. Aberta uma gaveta de uma das escrivaninhas, tudo escolhido ao acaso, encontra-se uma moeda de ouro. Qual a probabilidade de se ter escolhido a escrivaninha E_2?

Tem-se $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A/E_1) = 1 \qquad P(A/E_2) = \frac{1}{2} \qquad P(A/E_3) = 0$$

donde

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}$$

No exemplo dado as probabilidades do tipo $P(A_i)$ se apresentaram iguais. Poderiam ser distintas.

O teorema mostra como aproveitar a experiência anterior para estimar a probabilidade de um acontecimento.

Quando há falta de informação anterior, lança-se mão do "princípio da indiferença" segundo o qual se distribui com equidade a ignorância - os acontecimentos são considerados igualmente possíveis. Não havendo "razão suficiente" para se atribuir probabilidades desiguais assume-se com " razão insuficiente" que elas são iguais.

Atribuir as probabilidades $\frac{1}{6}$ às faces de um dado é proceder por "razão insuficiente" enquanto um exame tecnológico não mostrar ser o dado perfeito.

Na medida em que a noção de probabilidade exprimir um grau de crença, o princípio da insuficiência de Bayes se justifica. Interpretando a probabilidade como o verdadeiro valor da frequência relativa o princípio será arbitrário.

Capítulo II

LEI DE PROBABILIDADE. VARIÁVEL ALEATÓRIA. ESPERANÇA MATEMÁTICA. FUNÇÃO DE REPARTIÇÃO. DENSIDADE DE PROBABILIDADE TEOREMA DE TCHEBYCHEFF. TEOREMA DE BERNOULLI

LEI DE PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO

Seja um experimento ou observação apresentando K estados distintos, de que se conhecem as probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_K$ sendo $p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$.

Diz-se então que o experimento ou observação possue a lei da probabilidade ou distribuição de probabilidade

$$A \begin{cases} A_1 & A_2 & \ldots & A_K \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_K \end{cases} \qquad p_i = 1$$

VARIÁVEL ALEATÓRIA - Se cada um dos estados for mensurável será traduzível por números, porém mesmo que isto não ocorra por tratar-se de atributo qualitativo, podemos a cada estado fazer corresponder um número X. Tem-se então o que se entende por uma variável aleatória de ordem K.

$$X \begin{cases} X_1 & X_2 & \ldots & X_K \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_K \end{cases} \qquad p_i = 1$$

Exemplo - afrequência absoluta dá acontecimento A em n provas repetidas e uma variável aleatória de ordem $n + 1$.

$$X = V \begin{cases} 0 & 1 & 2 & & n \\ q^n & npq^{n-1} & \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} & \ldots & p^n \end{cases}$$

Representação em geometria das massas -- A lei de probabilidade de uma variável aleatória X de ordem K pode ser representada por um sistema de K pontos materiais colineares $Q_1, Q_2, \ldots, Q_K$ de abcissas $X_1, X_2, \ldots, X_K$ relativas a uma origem O e de massa ...... $p_1, p_2, \ldots, p_K$, sendo a massa total do sistema $p_i = 1$.

Função da variável aleatória - A função f(X) de uma variável X é por definição uma variável aleatória

$$f(X) \begin{cases} f(X_1) & f(X_2) & \ldots\ldots & F(X_K) \\ P_1 & P_2 & \ldots\ldots & P_K \end{cases}$$

Variável aleatória discreta. Se o número de valores possíveis de X é finito $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou infinitamente enumerável $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ a variável aleatória é dita discreta.

Variável aleatória contínua - Se a variável pode tomar qualquer valor no intervalo (a,b) - que pode ser o intervalo$(-\infty, +\infty)$a variável aleatória é contínua. A correspondente distribuição de massa sôbre a reta, em geometria das massas, é contínua e a massa no intervalo de extremos X e X+dX corresponde à probabilidade infinitéssima de X tomar um valor dêste intervalo.

NOÇÃO DE ESPERANÇA MATEMÁTICA

Trata-se de uma noção que se identifica com a de valor médio em estatística.

Sejam os jogadores A e B.

Imaginemos o jogador A recebendo de B a quantia M_1 com a ocorrência do evento E de probabilidade P_1 e entregando ao jogador B a quantia M_2 com o evento contrário $\bar{E}$ de probabilidade $P_2 = 1 - P_1$. O jôgo será justo de $P_1M_1 = P_2M_2$ como seria se $P_1 = P_2$, no caso de não haver perspectiva de pagamento.

Podemos imaginar o evento E se decompondo em k eventos exaustivos com probabilidades p_{1K} tal que $\sum p_{1K} = P_1$

Tem-se também K eventos contrários com probabilidades p_{2K} taes que $\sum p_{2K} = P_2$.

A êsses eventos alternativos, n'um caso e no outro corresponderão prêmios m_{1K} e m_{2K} taes que

$$\sum m_{1K} = M_1 \qquad e \qquad \sum m_{2K} = M_2$$

O jôgo será equitativo se

$$\sum p_{1K}m_{1K} = \sum p_{2K}m_{2K}$$

Cada jogador se dispõe então a pagar a quantia $\sum m_K p_K$ pela esperança de ganhar um prêmio como resultado de cada partida.

A quantia $\sum m_K p_K$ será dita esperança matemática de ganho.

Como a quantia m_K comporta-se como uma variável diante da qual se estabelece a equidade de cada jogada (de acôrdo com o valor p_K) define-se como esperança matemática

$$E(X) = \sum p_K x_K$$

Momentos de uma distribuição de probabilidades

Designa-se momento de ordem n relativamente à origem X_o à expressão:

$$M_n = E[X - X_o]^n$$

Em relação à origem $X_o = 0$ vem

$$m_n = E(X^n) \qquad m_1 = E(X) = \bar{X}$$

Os momentos centrados em $X_o = E(X)$ serão:

$$\mu_n = E[X - E(X)]^n \qquad \mu_2 = E[(X - E(X)]^2 = E[(X - \bar{X})^2]$$

$$\sigma = \sqrt{\ _2}$$

FUNÇÕES DE PROBABILIDADE DE UMA VARIÁVEL DISCRETA

Função de distribuição acumulada é a função que exprime para cada valor da variável a probabilidade de que essa variável assuma um valor igual ou menor que o valor dado

$$F(X_i) = P(X \leq X_i)$$

Função de distribuição é a função que relaciona cada valor da variável com a probabilidade de que se tem de encontrá-lo

$$f(X_i) = P(X = X_i)$$

Observação

1) É evidente

$$[F(X_i) - F(X_{i-1})] = [P(X \leq X_i) - P(X \leq X_{i-1})] = P(X = X_i) = f(X_i)$$

e também

$$F(X_i) = P(X = X_1) + P(X = X_2) + \dots + P(X = X_i) = \sum_{i=1}^{i} f(X_i)$$

2) Um confronto com as noções de função de repartição e função de densidade, definidas à seguir para uma variável contínua, tem levado alguns autores a usar esta nomenclatura em lugar de função de distribuição acumulada e função de distribuição. Função de distribuição acumulada e função de repartição de fato se equivalem. Quanto à função de distribuição ela nos dá a probabilidade da variável assumir precisamente um valor dado, o que não tem sentido no campo contínuo, onde vale indagar a probabilidade da variável assumir um valor n'um intervalo infinitessimal.

FUNÇÃO DE REPARTIÇÃO - DENSIDADE DE PROBABILIDADE E PROBABILIDADE ELEMENTAR DE UMA VARIÁVEL CONTÍNUA.

Função de repartição é a função, no caso contínua que dá, para cada valor da variável a, probabilidade de que essa variável assuma um valor igual ou menor que o valor dado

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Existindo a derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

chama-se:

Densidade de probabilidade a função $f(x) = F'(x)$

Designa-se probabilidade elementar a probabilidade infinitésima de X tomar um valor no intervalo de extremos x e $x+dx$ ou seja

$$f(x)dx = P[x < X < x + dx]$$

A probabilidade elementar representa a massa do intervalo de extremos x e $x + dx$

Designando por (a,b) o domínio de variação de X (que pode ser $-\infty, +\infty$) tem-se:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$P(a < X < x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

<u>Esperança matemática e momentos em geral</u>

No caso da variável discreta cabe substituir p por f(x). No caso da variável contínua o somatório será substituido pela integral calculada no domínio da definição da variável e p será substituido por f(x) dx.

<u>Exemplificação</u>

Distribuição binomial

Função da distribuição acumulada

$$F(X_i) = \sum_{X_o}^{X_i} \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$$

Função da distribuição

$$f(X_i) = \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$$

Assim chamada por ser $f(X_i)$ o têrmo geral do binômio $(p+q)^n$

2) - Distribuição normal.

Função de repartição

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

Probabilidade elementar

$$f(x)\,dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

Antes de entrarmos no estudo de distribuições vejamos o Teorema de Bienaymé-Tchebycheff permitindo determinar a probabilidade da variável ser interior a um determinado intervalo qualquer que seja sua lei de distribuição. Em seguida o Teorema de Bernoulli que justifica a noção de probabilidade empírica.

TEOREMA DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF

Qualquer que seja a lei da distribuição de uma variável, dado um número $K > 1$ a probabilidade P de se encontrar valores se afastando da média $\bar{X}$ de menos do que $\pm K\sigma$ é dada por $P > 1 - \frac{1}{K^2}$

Demonstração no caso da variável discreta

Temos $$\sigma^2 = \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 f(X) = \sum_1^n (X_i - \bar{X}) p_i$$

Dividindo por $K^2 \sigma^2$ vem:

$$\frac{1}{K^2} = \sum_1^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{K\sigma}\right) p_i$$

Designando por X_r os valores da variável tais que $X_r - \bar{X} > \pm K\sigma$ e por X_s os valores tais que $X_s - \bar{X} \leqslant \pm K\sigma$ podemos escrever:

$$\frac{1}{K^2} = \sum_1^r \left(\frac{X_r - \bar{X}}{K\sigma}\right)^2 p_r + \sum_1^s \left(\frac{X_s - \bar{X}}{K\sigma}\right) p_s$$

Ora $\sum_1^s \left(\frac{X_s - \bar{X}}{K\sigma}\right)^2 p_s \geqslant 0$ (um dos fatores é quadrático e $0 \leqslant p \leqslant 1$)

Então podemos escrever

$$\frac{1}{K^2} \geqslant \sum_1^r \left(\frac{X_r - \bar{X}}{K\sigma}\right)^2 p_r$$

Como $\left(\frac{X_r - \bar{X}}{K\sigma}\right)^2 > 1$ temos como maior razão $\frac{1}{K^2} \geqslant \sum_1^r p_r$

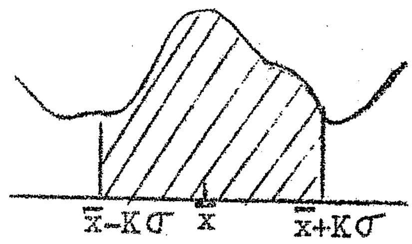
Sendo $\sum_1^r p_r$ a probabilidade total de valores se afastando da média de quantidade superior a $\pm K\sigma$, vamos designá-la Q, tal que $P + Q = 1$.

Sendo $Q \leqslant \frac{1}{K^2}$ ve m $1 - P \leqslant \frac{1}{K^2}$

ou seja $P \geqslant 1 - \frac{1}{K^2}$

<u>Demonstração no caso de variável contínua</u>

Temos $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \, f(x) \, dx$$



Sendo $K > 1$ logo positivo podemos escrever:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{x-K\sigma} (x-\bar{x})^2 f(x)dx + \int_{x-K\sigma}^{x+K\sigma} (x-\bar{x})^2 f(x)dx + \int_{x+K\sigma}^{+\infty} (x-\bar{x}) f(x)dx$$

$$\sigma^2 \geqslant \int_{-\infty}^{x-K\sigma} (x-\bar{x})^2 f(x)dx + \int_{x+K\sigma}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$$

desde que a 2ª parcela é $\geqslant 0$

Sendo $(x-\bar{x}) \geqslant \pm K\sigma$ somente para valores de x dados por $x \geqslant \bar{x} + K\sigma$ e $x \leqslant \bar{x} - K\sigma$

$(x - \bar{x})^2 \geqslant K^2 \sigma^2$ nas duas parcelas restantes podemos escrever com maioria de razão

$$\sigma^2 \geqslant \int_{-\infty}^{x-K\sigma} K^2 \sigma^2 \, f(x)dx + \int_{x+K\sigma}^{+\infty} K^2 \sigma^2 \, f(x)dx$$

$$\sigma^2 \geqslant K^2 \sigma^2 \quad p(x \leqslant \bar{x} - K\sigma) + K^2\sigma^2 \; p(x \geqslant \bar{x} + K\sigma)$$

$$\sigma^2 \geqslant K^2\sigma^2 \quad p\left[(x - \bar{x})^2 \geqslant K^2 \sigma^2\right]$$

$$\frac{1}{K^2} \geqslant p\left[(x - \bar{x})^2 \geqslant K^2 \sigma^2\right]$$

$$p\left[|x - \bar{x}| \geqslant K\sigma\right] \leqslant \frac{1}{K^2}$$

e então $$p\left[|x - \bar{x}| \leqslant K\sigma\right] \geqslant 1 - \frac{1}{K^2}$$

<u>Nota</u> - Para uma lei contínua, unimodal e sensivelmente simétrica, tem validade a desigualdade de Camp e Meidel

$$P\left[|x-\bar{x}| < K\sigma\right] \geqslant 1 - \frac{1}{2{,}25\,K^2}$$

Quando se conhece a lei, a relação acima pode ser melhorada, sendo determinada rigorosamente a probabilidade para que a variável seja compreendida em um intervalo dado. Veja-se o quadro a seguir onde se faz uma comparação com a lei normal.

t	B-T	C-M	Lei normal
2	⩾ 75 %	⩾ 88,8 %	95,4 %
3	⩾ 88,8%	⩾ 95,1 %	99,7 %
4	⩾ 93,7%	⩾ 97,2 %	99,9 %

TEOREMA DE BERNOULLI

Consideremos a distribuição do número relativo de vezes que se verifica um resultado ao qual se pode atribuir "a priori" a probabilidade p constante. Seja $q = 1 - p$ a probabilidade complementar. Estamos diante da variável aleatória de ordem $n+1$ que se apresenta (os valores estando ordenados no sentido crescente):

$$X = \frac{V}{n}\begin{cases} \frac{0}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & & n-1 & n \\ q^n & npq^{n-1} & \binom{n}{2}p^2q^{n-2} & \ldots\ldots\ldots & np^{n-1}q & p^n \end{cases}$$

Fàcilmente obtemos $\bar{X} = p$ $\qquad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

De acôrdo com o Teorema de Tchebycheff. Se $K > 1$ é um número dado, a probabilidade P de que $\frac{V}{n}$ se afaste de sua média p de menos do que $\pm K\sigma = \pm K\sqrt{\frac{pq}{n}}$ é dado por $P \geqslant 1 - \frac{1}{K^2}$

Tomando K suficientemente grande $P \rightarrow 1$ e por sua vez, <u>fixando K</u>, pode-se fazer n crescer de tal modo que a flutuação de $\frac{V}{n}$ em tôrno de p, seu valor médio, fique compreendido n'um intervalo $\pm K\sqrt{\frac{pq}{n}}$ tão pequeno quanto se queira

Em outros termos com probabilidade P que tende para a certeza, as frequências relativas $\frac{V}{n}$ tendem para a probabilidade p quando n cresce indefinidamente.

Podemos escrever $\frac{V}{n} \longrightarrow p$ com uma probabilidade $P \longrightarrow 1$ ou seja: de modo "sui generis"-no sentido do cálculo das probabilidades - $\frac{V}{n}$ tende para p como uma probabilidade tão próxima de 1 quanto quizermos.

Costuma-se designar pela <u>lei dos grandes números</u> o que é uma decorrência do que se acaba de demonstrar. Sendo constante a probabilidade de um acontecimento submetido a um número de provas cada vez maior, a sua frequência tende para a probabilidade de uma maneira pràticamente certa - diz-se que o acontecimento satisfaz a lei dos grandes números.

Capítulo III

PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS - Vejamos às distribuições discretas mais frequentemente usadas.

Distribuição binomial ou de Bernoulli.

Função de distribuição $f(X) = \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$
(Têrmo geral do binômio de Newton)

Função de distribuição acumulada $F(X) = \sum_{0}^{X} \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$

$$\bar{X} = np \qquad \sigma = \sqrt{npq} \qquad \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \qquad \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1-6pq}{npq}$$

Trata-se do modêlo matemático adequado à observação das frequências de ocorrência de um acontecimento de probabilidade p, alternativo de um outro (de probabilidade $q = 1 - p$) em n observações ou experimentos análogos (cujas condições iniciais não se modificam). Assim, n'uma amostragem se exige uma caracterização dicotômica de elementos, a invariância da composição da população total (tiragem com reposições) ou que seu efetivo seja suficientemente grande para assegurar esta invariância ($\frac{N}{10} > n$) .

Compreenderemos facilmente o esquema binomial com o seguinte exemplo :

Suponha-se lançada uma moeda - ou dá cara ou coroa, de probabilidades p e q (ambas $\frac{1}{2}$)

f ou c $\qquad (p + q)$

Lançadas duas moedas temos as seguintes ocorrências

ff fc cc $\qquad$ pp pq qq
cf $\qquad$ qp

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$$

Lançadas três moedas vem

fff ffc ccf ccc $\qquad ppp + 3p^2q + 3q^2p + q^2 =$
fcf cfc
cff fcc $\qquad = (p + q)^3$

Assim sucessivamente.

Aplicado as noções de probabilidade composta e probabilidade total temos a probabilidade das diversas ocorrências segundo o termo geral do binômio de Newton.

O conjunto de probabilidades se expressará então pelo desenvolvimento do binômio.

Observações: 1) Tomando como variável a frequência relativa tem-se:

$$\bar{X} = np \qquad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

2) Para $p \cong q$ e n suficientemente grande a lei binomial pode ser assimilada à lei normal. (aproximação válida para $npq > 15$). (Vide gráfico página 25)

3) A generalização da lei binomial é a lei multinomial onde em lugar de n provas independentes dando lugar a duas eventualidades se tem em cada prova uma ou outra de K eventualidades possíveis de probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_K$ com $\sum p_i = 1$

$$f(X) = \frac{n!}{X_1!X_2!\ldots X_K!} \; p_1^{X_1} \; p_2^{X_2} \ldots\ldots p_K^{X_K}$$

com $\sum X_i = n$

Para as diversas variações se terá:

$$\bar{X}_i = np_i \qquad \sigma = \sqrt{np_i(1-p_i)}$$

No caso da variável ser $\frac{X_i}{n}$

$$\bar{X}_i = p_i \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p_i(1-p_i)}{n}}$$

Distribuição hipergeométrica

$$f(X) = \frac{\binom{Np}{X}\binom{Nq}{n-X}}{\binom{N}{n}}$$

$$F(X) = \sum_{0}^{X} \frac{\binom{Np}{X}\binom{Nq}{n-X}}{\binom{N}{n}}$$

$$\bar{X} = np \qquad \sigma = \sqrt{npq \cdot \frac{N-n}{n-1}} \qquad \gamma_1 = \frac{(q-p)(N-2n)}{\sqrt{npq}\ (N-2)} \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N-n}}$$

$$\gamma_2 = \frac{N-1}{npq(N-n)(N-2)(N-3)} \left\{ N(N+1)-6n(N-n)+3pq\left[N^2(n-2)+6n(N-n)\right] \right\} - 3$$

Modêlo matemático para o caso mais geral que o anterior (lei binomial) aplicável quando o efetivo de populações é pouco elevado, onde o levantamento de uma amostra modifica a composição do conjunto (tiragem sem reposição ou exaustiva)

Observações: 1) Quando $p \cong q$ e N é grande relativamente a X, tem-se Np e Nq grandes relativamente a X e $n-X$ e vem:

$$\frac{\binom{Np}{X}\binom{Nq}{n-X}}{\binom{N}{n}} \cong \binom{n}{X} p^X q^{n-X}$$

2) Para n grande (embora pequeno face a N) poderá se colocar a lei binomial de aproximação pela lei normal, como anteriormente.

Distribuição de Poisson

$$f(X) = e^{-m} \frac{m^X}{X!}$$

$$F(X) = \sum_{0}^{X} e^{-m} \frac{m^X}{X!}$$

$e = 2{,}71828$ (base neperiana)

$m = np$

$$\bar{X} = m \qquad \sigma = \sqrt{m} \qquad \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{1}{m}} \qquad \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1}{m}$$

Modêlo matemático para um esquema análogo ao da lei binomial mas sendo n grande e $p \cong 0$, sendo o produto $m = np$ finito (exemplo $n = 50$, $p = 0{,}10$ donde $m = 5$). A distribuição é dita dos "acontecimentos raros".

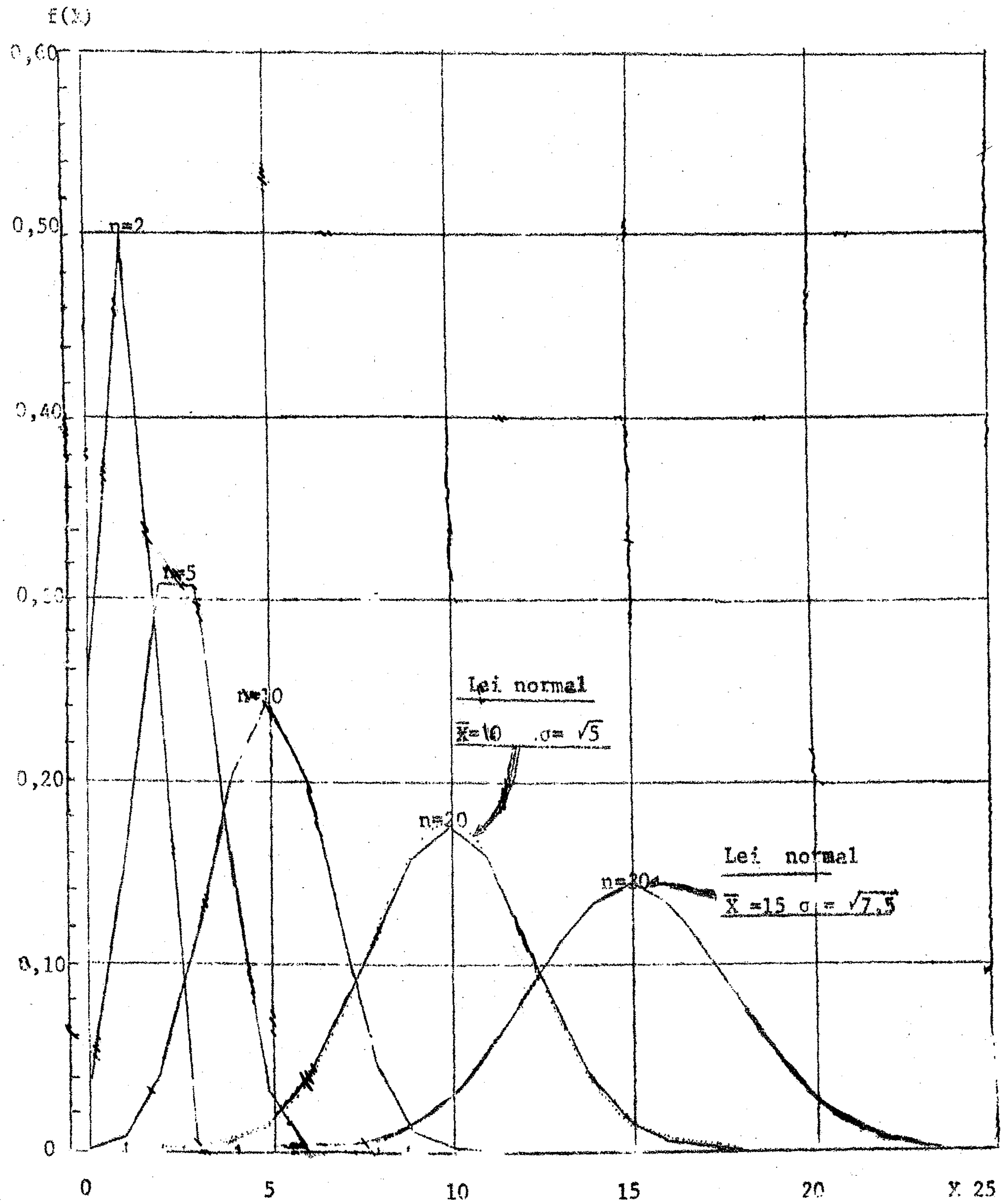
Observações: 1) A lei depende de um só parâmetro m.

2) Para m suficientemente grande a lei de Poisson tende para a lei normal (aproximação válida para $m > 15$) (Vide gráfico página 26)

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

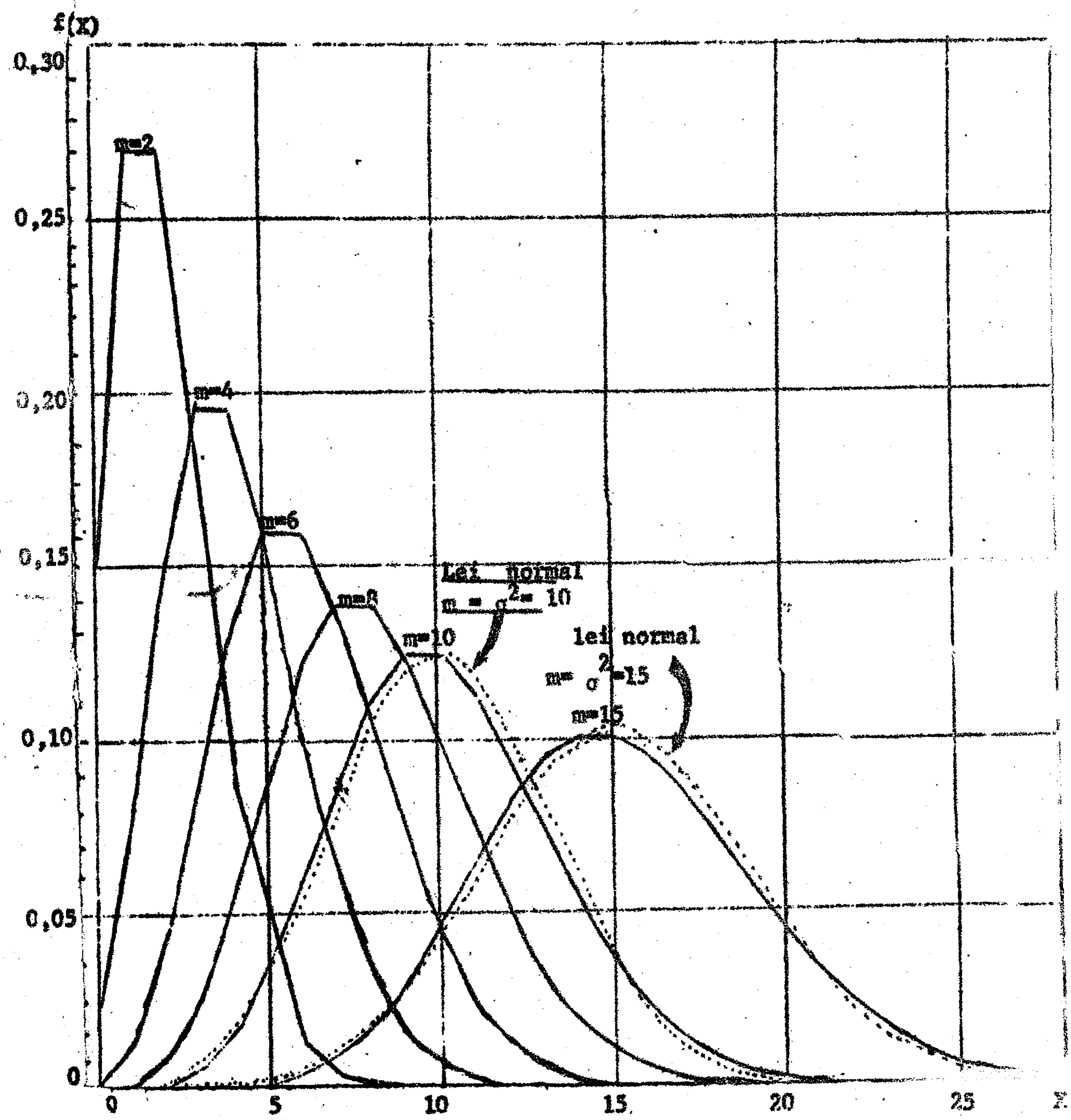
$(0,5 + 0,5)^n$

$$f(X) = \binom{n}{X}(0,5)^X(0,5)^{n-X}$$



DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$$f(X) = e^{-m} \frac{m^X}{X!}$$



DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS - Estudemos a lei normal.

Distribuição normal de Laplace-Gauss

Uma variável X, tomando todo valor x $(-\infty < x < +\infty)$ é **distribuida segundo a lei normal se:**

$$f(x)dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

$\bar{X} = a$ $\quad \sigma = b$ $\quad \beta_1 = 0$ $\quad \beta_2 = 3$

$(\bar{X} = \hat{X} = \overline{X})$

As seguintes condições, ditas condições de Borel sendo **satisfeitas, a variável segue** a lei normal.

1º - **Os fatores** de variação de x são numerosos.

2º - **As flutuações** devidas aos diferentes fatores que **determinam** x **são** independentes.

3º - **As flutuações** acima se distribuem segundo uma **lei qualquer mas sendo** suficientemente fracas as frequências **de grandes** flutuações.

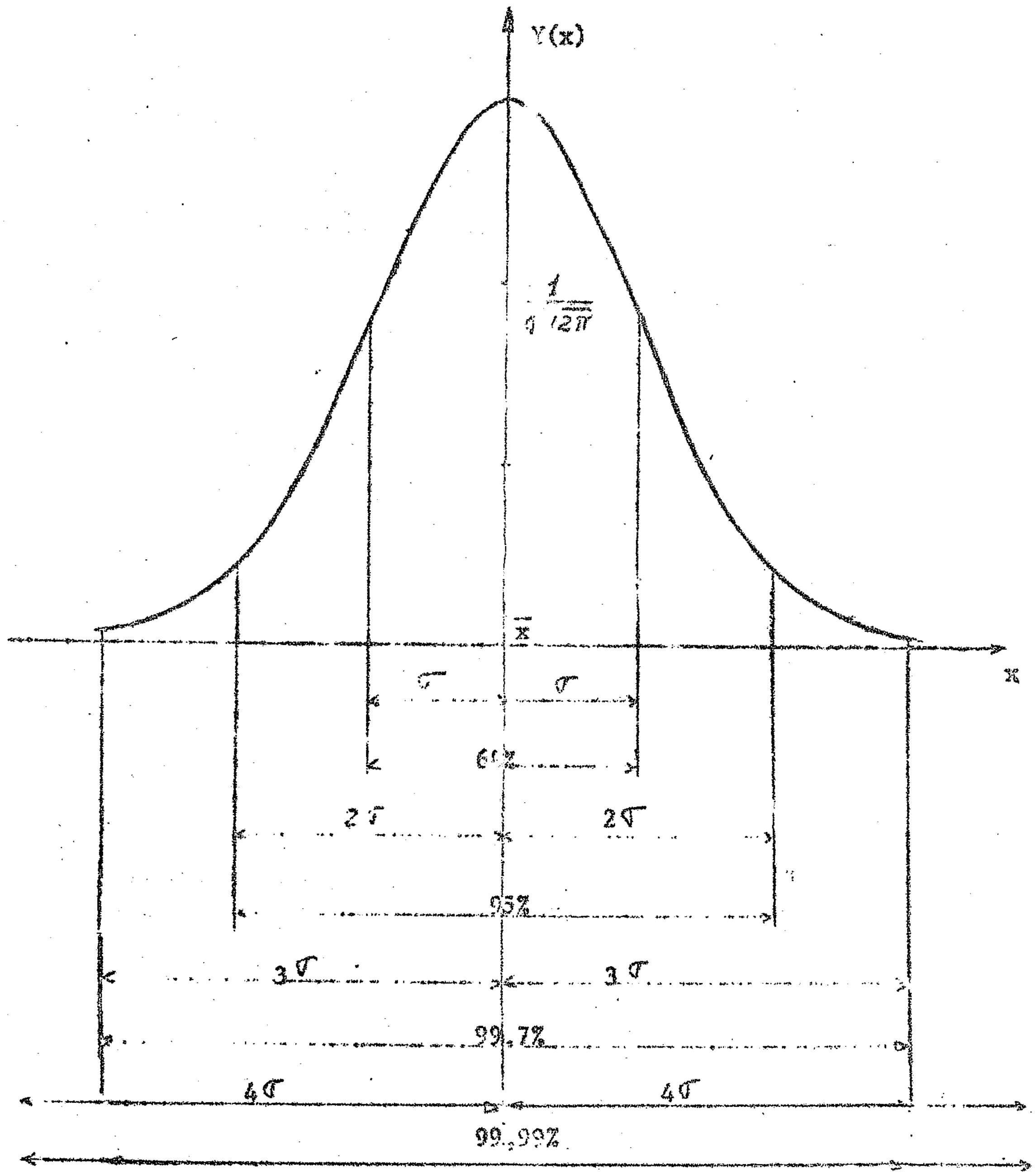
4º - **As flutuações** devidas a um fator particular são **reduzidas face à flutuação** total, devida ao conjunto **de fatores.**

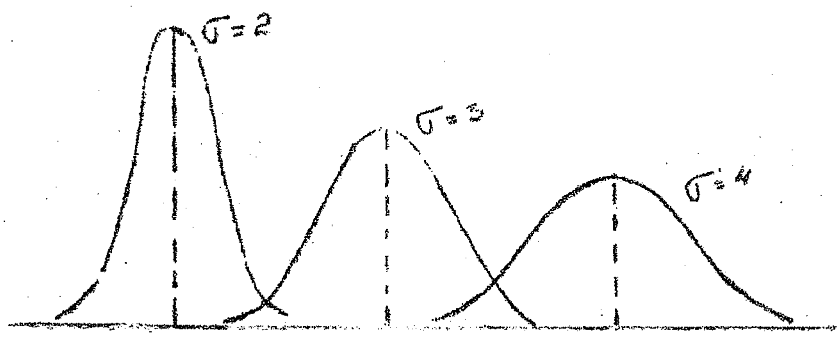
Como sabemos $f(x)\,dx$ é a probabilidade **elementar,** $f(x)$ é a **densidade de probabilidade** em $X = x$ e $F(x)$ é a **função de repartição.**

Para a lei normal vale o seguinte esquema para o **percentual de valores de abcissas** $x = \bar{x} \pm u\,\sigma$ (Vide Figura **página seguinte**)

Note-se que a ordenada máxima depende do valor de σ **havendo um ponto de inflexão** a $\pm\,\sigma$.

Trata-se de uma curva simétrica, assíntota no eixo dos **x tendo um ponto de inflexão** a $\pm\,\sigma$, mais ou menos achatada **conforme** σ **seja maior ou menor.**





Segundo o valor de σ fôr menor ou maior a distribuição será menos ou mais dispersa e por sua vez menos ou mais achatada.

Variável normal reduzida.

Fazendo $U = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ se dirá que U é uma variável normal reduzida $N(0,1)$ de tabulação

$$f(u)\,du = \text{Prob}(u < U < u + du) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

$$F(u) = \text{Prob}(U < u) = \int_{-\infty}^{U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Se designará por u_α o valor particular de u tal que

$$\alpha = \text{Prob}(U < u_\alpha)$$

u_α se dirá fratil de ordem α.

Variável reduzida nas aproximações binomial e Poisson

A variável normal reduzida no caso de aproximação da lei binomial será:

$$u = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \longrightarrow N(0,1) \qquad npq > 15$$

No caso da lei de Poissom

$$u = \frac{X - m}{\sqrt{m}} \longrightarrow N(0,1) \qquad m = np > 15$$

Probit - Utiliza-se as vezes, em lugar de $u = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ a variável $t = u + 9$. chamada "probit", sempre positivs, o que facilita os cálculos

Verificação gráfica de normalidade - Reta de Henry

Um gráfico de escala funcional, onde no eixo das ordenadas se marcam probabilidades acumuladas da lei normal reduzida, permite o estudo de uma distribuição normal a partir de uma amostra.

Se $F(x)$ é a frequência acumulada ~~das observações inferiores~~ a x na amostra, colocando sobre o gráfico os pontos (x, F), êles surgirão segundo uma reta, se a amostra provém de população normal.

Os valores de u para os quais

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

estão ligados a x pela relação:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

d'onde $u = -\frac{1}{\sigma} \bar{x} + \frac{1}{\sigma} x = -\beta\bar{x} + \beta x = \alpha + \beta x$

sendo $\beta = \frac{1}{\sigma}$ e $\alpha = -\beta\bar{x}$. É a reta de Henry.

Papel Gausso-arithmético

Eixo das abcissas - escala arithmética

Eixo das ordenadas - "graduação normal" - ou seja em lugar de u se lê $F(u)$ (em percentual - daí porque se trabalhará com frequências relativas acumuladas)

$u = 0$	lê-se	50%
$u = 1$	"	84,13%
$u = 2$	"	97,72%

Podemos então:

1º) Constatar se a distribuição pode ser tomada como normal - os pontos disponíveis devem se apresentar corretamente alinhados.

2º) Se a condição anterior ocorrer, a média e o desvio padrão serão estimados como segue:

$\bar{X}$ - abcissa do ponto de ordenada 50% (posto que mediana e média são iguais n'uma distribuição simétrica.

σ - dado pela fórmula $\sigma = \frac{x_2 - x_1}{4}$

onde x_2 e x_1 são abcissas dos pontos de ordenadas 97,72 % e 2,28 % .

Assim $F(x_1) = F(\bar{x} + 2\sigma) = 97,72$

$F(x_1) = F(\bar{x} - 2\sigma) = 2,28$

$$x_2 - x_1 = \bar{x} + 2\sigma - (\bar{x} - 2\sigma) = 4\sigma$$

(Vide figura página 33)

Exemplificação:

X_i	z_i	S_i	z_i	s_i
5,5	4	4	0,00915	0,00915
6,5	9	13	0,02060	0,02975
7,5	34	47	0,07780	0,10755
8,5	77	124	0,17620	0,28375
9,5	94	218	0,21511	0,49886
10,5	88	306	0,20137	0,70023
11,5	65	371	0,14874	0,84897
12,5	40	411	0,09153	0,94050
13,5	15	426	0,03433	0,97483
14,5	4	430	0,00915	0,98398
15,5	5	435	0,01144	0,99542
16,5	2	437	0,00458	1,00000
	437			

Veja-se no papel gausso-arithmético que os pontos estão em linha reta.

Para a média tem-se:

$\bar{X}$ = 9,5 próximo do valor 9,627 que se obtem calculando diretamente.

Obtenção de σ

Abcissa do ponto $\bar{X} + 2\sigma$ (97,72 %) - 13,4
Abcissa do ponto $\bar{X} - 2\sigma$ (2,28 %) - 5,9

$$\sigma = \frac{13,4 - 5,9}{4} = \frac{7,5}{4} = 1,87$$ próximo do valor 1,86 que se obtem calculando diretamente.

Propriedades da lei normal.

1) Se $x_1, x_2, \ldots, x_K$ são variáveis normais independentes $N_1(\bar{x}_1\ \sigma_1), N_2(\bar{x}_2\ \sigma_2) \ldots N_K(\bar{x}_K\ \sigma_K)$ a variável $W = \sum_{1}^{K} x_i$ será também uma variável normal de média igual a soma das médias e variância igual à soma das variâncias.

$$\bar{W} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_K \qquad \sigma_W^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \sigma_{x_K}^2$$

2) De um modo geral se $x_1, x_2, \ldots, x_K$ são variáveis aleatórias independentes, de lei qualquer, taes que a variância de cada uma $\sigma^2_{x_i}$ seja pequena comparada com a variância da variável soma σ^2_W, a variável $u = \dfrac{W - \overline{W}}{\sqrt{\sigma^2_W}}$ tende para a variável normal reduzida $N(0,1)$ quando n tende para infinito.

Pràticamente, isto equivale a dizer que se W resulta de um grande números de causas independentes produzindo efeitos aditivos $x_1, x_2, \ldots, x_K$ taes que a variância devida a cada efeito é fraca diante da variância resultante, esta variável W segue a lei normal.

Esta propriedade vem a ser o chamado Teorema <u>central do limite</u>.

<u>Distribuição log-normal</u>

Uma variável aleatória x segue a lei log-normal se a variável $y = \log_{10} x$ ou, mais geralmente, $y = \log_{10}(x - a)$ para $x > a$ é distribuida segundo a lei normal $N(\bar{y}, \sigma_y)$ sendo $\bar{y}$ e σ_y a média e desvio padrão de $\log_{10}(x - a)$.

Para uma lei dada, $\bar{y}$ e σ_y e <u>a</u>, sendo conhecidos se terá após calcular $y = \log_{10}(x - a)$

$$P(X < x) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \quad \left(u = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}\right)$$

Para a variável x tenes:

$$\bar{x} = a + e^{\bar{y}' + \frac{1}{2} \sigma_y'^2}$$

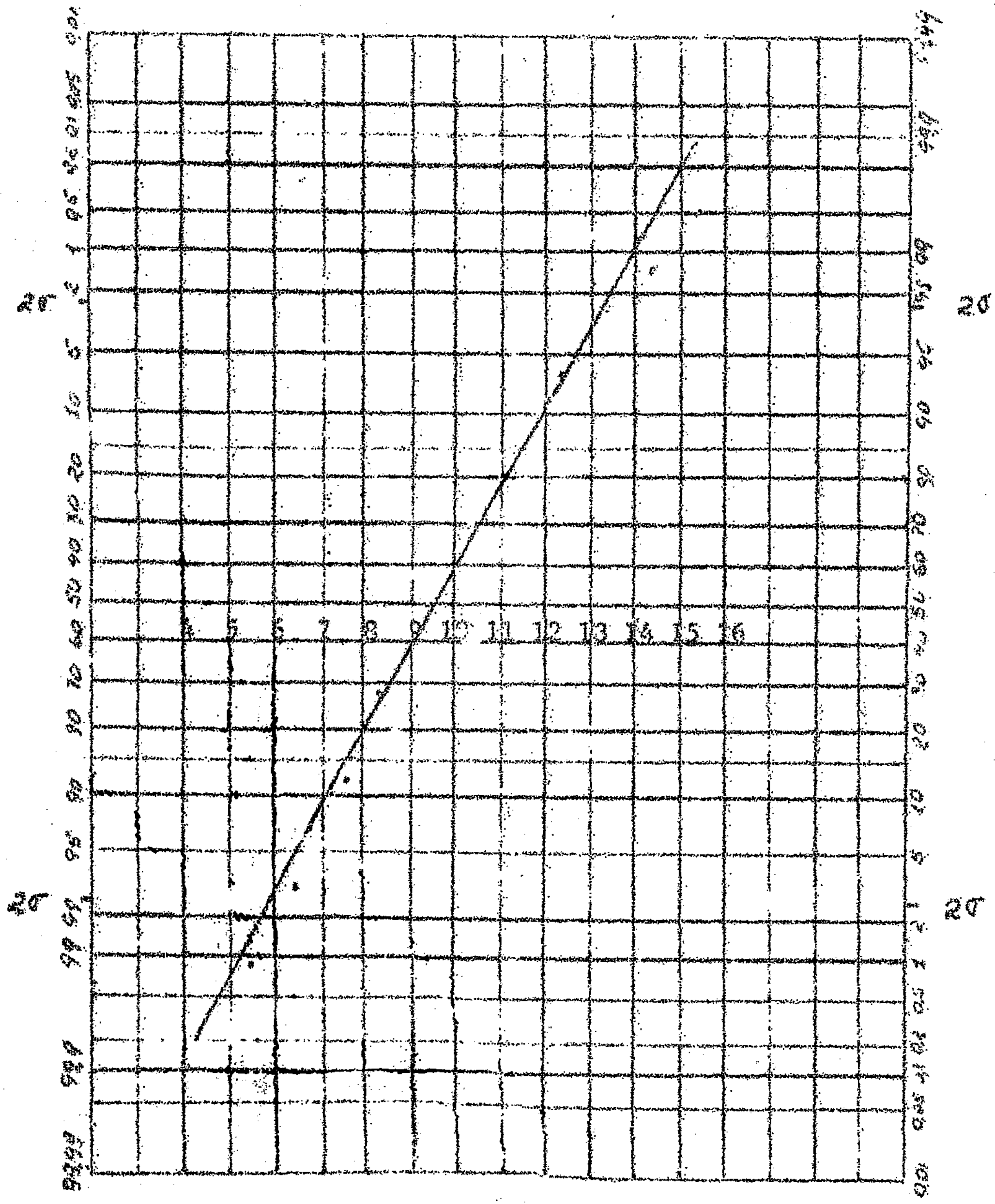
$$\sigma_x^2 = e^{2\bar{y}' + \sigma_y'^2} \left(e^{\sigma_y'^2} + 1\right)$$

$$\hat{x} = a + e^{\bar{y}' - \sigma_y'^2}$$

$$\bar{\bar{X}} = a + e^{\bar{y}'}$$

com

$$\bar{y}' = 2{,}3026\, \bar{y} \qquad \sigma_y' = 2{,}3026\, \sigma_y$$



Recta de Henry

Capítulo IV

ALGUMAS TABELAS COM EXEMPLIFICAÇÃO

FUNÇÃO DE REPARTIÇÃO DA LEI NORMAL REDUZIDA

Exemplos: $\bar{x} = 12$ $\sigma = 2$

1) Frequência de valores inferiores a 8,5.

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{8,5 - 12}{2} = -1,75$$

$$F(u) = F(-1,75) = 1 - F(1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$$

2) Frequência de valores entre $x_1 = 8,5$ e $x_2 = 15$

$$u_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{8,5 - 12}{2} = -1,75$$

$$u_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{15 - 12}{2} = 1,50$$

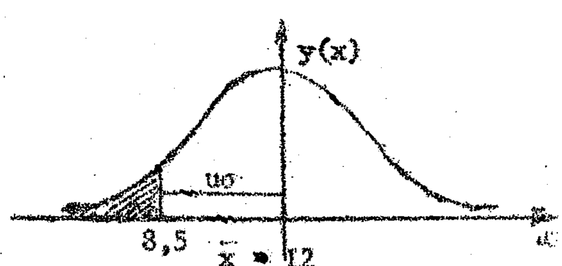
$$P\ -1,75 < u < 1,5 = F(1,5) - F(-1,75) = 0,9332 - 0,0401 = 0,8931$$

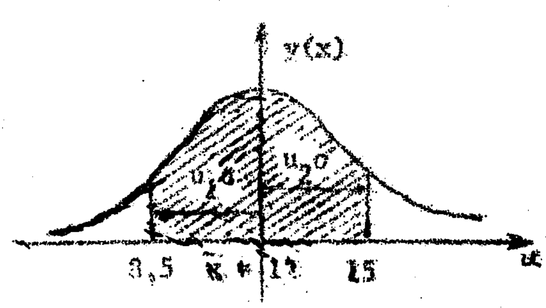
3) Frequência de valores compreendidos entre $X_1 = 14$ e $x_2 = 15,2$.

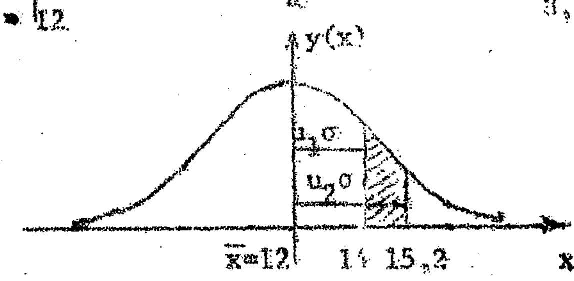
$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{14 - 12}{2} = 1,0$$

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{15,2 - 12}{2} = 1,6$$

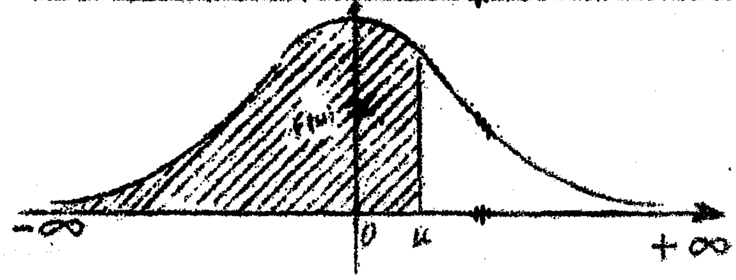
$$F(u_2) - F(u_1) = F(1,6) - F(1) = 0,9452 - 0,8413 = 0,1039$$







FUNÇÃO DE REPARTIÇÃO DA LEI NORMAL REDUZIDA
(Probabilidade de achar um valor inferior a u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8023	0,8051	0,8078	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	[illegible]	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	[illegible]	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	[illegible]	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Tabela para os grandes valores de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,[illegible]	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,9990[illegible]	[illegible],9993	0,99952	0,99966	0,99976	0,9998[illegible]1	0,999928	0,999968	0,999997

Nota - A tabela dá os valores de F(u) para u positivo. Quando u é negativo torna-se necessário tomar o complemento para a unidade do valor lido na Tabela.

para u = 1,37 F(u) = 0,91[illegible]
para u = -1,37 F(u) = 0,[illegible]53

DENSIDADE DE PROBABILIDADE DA LEI NORMAL REDUZIDA

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma}\, f(u) \quad \text{com} \quad u = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

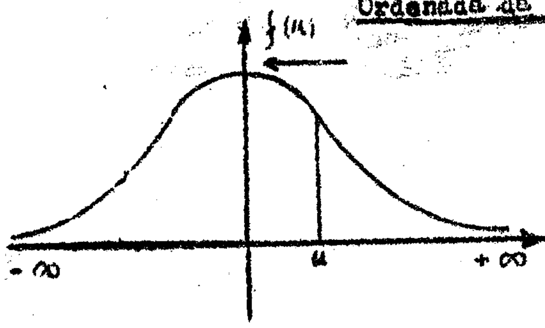
$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Exemplo $\bar{x} = 12$ $\quad \sigma = 2$ $\quad x = 14,4$

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{14,4 - 12}{2} = 1,2$$

$f(u) = f(1,2) = 0,1942$ $\qquad y(x) = \frac{1}{\sigma}\, f(u) = 0,0971$

DENSIDADE DA PROBABILIDADE DA LEI NORMAL REDUZIDA
(Ordenada da curva normal)



$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

u	f(u)	Δf(u)
0,0	0,3989	- 19
0,1	0,3970	- 60
0,2	0,3910	- 96
0,3	0,3814	- 131
0,4	0,3683	- 162
0,5	0,3521	- 189
0,6	0,3332	- 209
0,7	0,3123	- 226
0,8	0,2897	- 236
0,9	0,2661	- 241
1,0	0,2420	- 241
1,1	0,2179	- 237
1,2	0,1942	- 228
1,3	0,1714	- 217
1,4	0,1497	- 202
1,5	0,1295	- 186
1,6	0,1109	- 169
1,7	0,0940	- 150
1,8	0,0790	- 134
1,9	0,0656	- 116
2,0	0,0540	- 100
2,1	0,0440	- 85
2,2	0,0355	- 72
2,3	0,0283	- 59
2,4	0,0224	- 49
2,5	0,0175	- 39
2,6	0,0136	- 32
2,7	0,0104	- 25
2,8	0,0079	- 19
2,9	0,0060	- 16
3,0	0,0044	- 11
3,1	0,0033	- 9
3,2	0,0024	- 7
3,3	0,0017	- 5
3,4	0,0012	- 3
3,5	0,0009	- 3
3,6	0,0006	- 2
3,7	0,0004	- 1
3,8	0,0003	- 1
3,9	0,0002	- 1
4,0	0,0001	

TÁBUA - SOMA DE TÊRMOS DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$\sum_{x = x'}^{x = n} \binom{n}{x} p^x . (1 - p)^{n - x}$$

(As probabilidades estão multiplicadas por 10^4)

n	x	p = 0,05	p = 0,10	p = 0,20	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	-
4	1	1855	3439	5904	7599	8704	9375	3
	2	0140	0523	1808	3483	5248	6875	2
	3	0005	0037	0272	0837	1792	3125	1
	4	0000	0001	0016	0081	0256	0625	0
5	1	2262	4095	6723	8319	9222	9688	4
	2	0226	0815	2627	4718	6630	8125	3
	3	0012	0086	0579	1631	3174	5000	2
	4	0000	0005	0067	0308	0870	1875	1
	5	0000	0000	0003	0024	0102	0312	0
10	1	4013	6513	8926	9718	9940	9990	9
	2	0861	2639	6242	8507	9536	9893	8
	3	0115	0702	[illegible]	6172	8327	9453	7
	4	0010	0128	1209	3504	6177	8281	6
-	-	p = 0,95	p = 0,90	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,50	p = 0,60	y'

TÁBUA (continuação)

n	x'	p = 0,05	p = 0,1[illegible]	p = 0,20	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	-
	5	0001	[illegible]	0328	1503	3669	6230	5
	6	0000	[illegible]	[illegible]	0473	1662	3770	4
	7	0000	[illegible]	[illegible]	0106	0548	1719	3
	8	0000	[illegible]	[illegible]	0016	0123	0547	2
	9	0000	[illegible]	[illegible]	0001	0017	0107	1
	10	0000	[illegible]	[illegible]	0000	0001	0010	0
15	1	5347	[illegible]	[illegible]	9953	9995	1 0000	14
	2	1710	[illegible]	[illegible]	9647	9948	9995	13
	3	0362	[illegible]	[illegible]	8732	9729	9963	12
	4	0055	[illegible]	[illegible]	7031	9095	9824	11
	5	0006	[illegible]	[illegible]	4845	7827	9408	10
	6	0001	[illegible]	0611	2784	5968	8491	9
	7	0000	[illegible]	0181	1311	3902	6964	8
	8	0000	[illegible]	0042	0500	2131	5000	7
	9	0000	[illegible]	0008	0152	0950	3036	6
	10	0000	[illegible]	0001	0037	0338	1509	5
	11	0000	[illegible]	0000	0007	0093	0592	4
	12	0000	[illegible]	0000	0001	0019	0176	3
	13	0000	[illegible]	0000	0000	0003	0037	2
	14	0000	0000	0000	0000	0000	0005	1
	15	0000	[illegible]	0000	0000	0000	0000	0
-	-	p = 0,95	p = 0,9[illegible]	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,60	p = 0,50	y'

TÁBUA – SOMA DE TÊRMOS DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$\sum_{x = x'}^{x = n} \binom{n}{x} p^x . (1 - p)^{n - x}$$

(As probabilidades estão multiplicadas por 10^4)

n	x	p = 0,05	p = 0,10	p = 0,20	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	–
4	1	1855	3439	5904	7599	8704	9375	3
	2	0140	0523	1808	3483	5248	6875	2
	3	0005	0037	0272	0837	1792	3125	1
	4	0000	0001	0016	0081	0256	0625	0
5	1	2262	4095	6723	8319	9222	9688	4
	2	0226	0815	2627	4718	6630	8125	3
	3	0012	0086	0579	1631	3174	5000	2
	4	0000	0005	0067	0308	0870	1875	1
	5	0000	0000	0003	0024	0102	0312	0
10	1	4013	6513	8926	9718	9940	9990	9
	2	0861	2639	6242	8507	9535	9893	8
	3	0115	0702	3222	6172	8327	9453	7
	4	0010	0128	1209	3504	6177	8281	6
	–	p = 0,95	p = 0,90	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,60	p = 0,60	y'

TÁBUA (continuação)

n	x'	p = 0,05	p = 0,10	p = 0,20	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	–
	5	0001	[illegible]	0328	1503	3669	6230	5
	6	0000	[illegible]	[illegible]	0473	1662	3770	4
	7	0000	[illegible]	[illegible]	0106	0548	1719	3
	8	0000	[illegible]	[illegible]	0016	0123	0547	2
	9	0000	[illegible]	[illegible]	0002	0017	0107	1
	10	0000	[illegible]	[illegible]	0000	0001	0010	0
15	1	5347	[illegible]	[illegible]	9953	9995	1 0000	14
	2	1710	[illegible]	[illegible]	9647	9948	9995	13
	3	0362	[illegible]	[illegible]	8732	9729	9963	12
	4	0055	[illegible]	[illegible]	7031	9095	9824	11
	5	0006	[illegible]	[illegible]	4845	7827	9408	10
	6	0001	[illegible]	0611	2784	5968	8491	9
	7	0000	[illegible]	0181	1311	3902	6964	8
	8	0000	[illegible]	0042	0500	2131	5000	7
	9	0000	[illegible]	0008	0152	0950	3036	6
	10	0000	[illegible]	0001	0037	0338	1509	5
	11	0000	[illegible]	0000	0007	0093	0592	4
	12	0000	[illegible]	0000	0001	0019	0176	3
	13	0000	[illegible]	0000	0000	0003	0037	2
	14	0000	0000	0000	0000	0000	0005	1
	15	0000	[illegible]	0000	0000	0000	0000	0
–		p = 0,95	p = 0,90	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,60	p = 0,50	y'

TÁBUA – SOMA DE TÊRMOS DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$\sum_{x = x'}^{x = n} \binom{n}{x} p^x . (1 - p)^{n - x}$$

(As probabilidades estão multiplicadas por 10^4)

n	x	p = 0,05	p = 0,10	p = 0,20	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	–
4	1	1855	3439	5904	7599	8704	9375	3
	2	0140	0523	1808	3483	5248	6875	2
	3	0005	0037	0272	0837	1792	3125	1
	4	0000	0001	0016	0081	0256	0625	0
5	1	2262	[illegible]	6723	8319	9222	9688	4
	2	0226	[illegible]	2627	4718	6630	8125	3
	3	0012	[illegible]	0579	1631	3174	5000	2
	4	0000	[illegible]	0067	0308	0870	1875	1
	5	0000	[illegible]	0003	0024	0102	0312	0
10	1	4013	[illegible]	8926	9718	9940	9990	9
	2	0861	[illegible]	6242	8507	9536	9893	8
	3	0115	[illegible]	3222	6172	8327	9453	7
	4	0010	[illegible]	1209	3504	6177	8281	6
–		p = 0,95	p = 0 [illegible]0	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,60	p = 0,60	y'

TÁBUA (continuação)

n	x'	p = 0,05	p = 0,10	p = [illegible]0	p = 0,30	p = 0,40	p = 0,50	–
	5	0001	0016	[illegible]	1503	3669	6230	5
	6	0000	[illegible]	[illegible]	0473	1662	3770	4
	7	0000	[illegible]	[illegible]	0106	0548	1719	3
	8	0000	[illegible]	[illegible]	0016	0123	0547	2
	9	0000	[illegible]	[illegible]	0001	0017	0107	1
	10	0000	[illegible]	[illegible]	0000	0001	0010	0
15	1	5347	[illegible]	[illegible]	9953	9995	1 0000	14
	2	1710	4510	[illegible]	9647	9948	9995	13
	3	0362	[illegible]	[illegible]	8732	9729	9963	12
	4	0055	[illegible]	[illegible]	7031	9095	9824	11
	5	0006	0127	[illegible]	4845	7827	9408	10
	6	0001	[illegible]	[illegible]	2784	5968	8491	9
	7	0000	[illegible]	[illegible]	1311	3902	6964	8
	8	0000	[illegible]	[illegible]	0500	2131	5000	7
	9	0000	[illegible]	[illegible]	0152	0950	3036	6
	10	0000	[illegible]	[illegible]	0037	0338	1509	5
	11	0000	[illegible]	[illegible]	0007	0093	0592	4
	12	0000	[illegible]	[illegible]	0001	0019	0176	3
	13	0000	0000	[illegible]	0000	0003	0037	2
	14	0000	0000	[illegible]	0000	0000	0005	1
	15	0000	0000	[illegible]	0000	0000	0000	0
–		p = 0,95	p = 0,90	p = 0,80	p = 0,70	p = 0,60	p = 0,50	y'

TABUA - DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$$f(x) = \frac{m^x}{e^m \cdot x!}$$

x \ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	,0905	,1637	,2222	,2681	,3033	,3293	,3476	,3595	,3659	,3679
2	,0045	,0164	,0333	,0536	,0758	,0988	,1217	,1438	,1647	,1839
3	,0002	,0011	,0033	,0072	,0126	,0198	,0284	,0383	,0494	,0613
4	,0000	,0001	,0002	,0007	,0016	,0030	,0050	,0077	,0111	,0153
5	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0004	,0007	,0012	,0020	,0031
6	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0003	,0005
7	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001

x \ m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,0	7,0	8,0	9,0	10
0	0,2231	0,0821	0,0302	0,0111	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	,3347	,2052	,1057	,0500	,0225	,0149	,0064	,0027	,0011	,0005
2	,2510	,2565	,1850	,1125	,0618	,0446	,0223	,0107	,0050	,0023
3	,1255	,2138	,2158	,1687	,1133	,0892	,0521	,0286	,0150	,0076
4	,0471	,1336	,1888	,1898	,1558	,1339	,0912	,0573	,0337	,0189

TABUA - SOMA DOS TÊRMOS DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$$\sum_{x = x'}^{x = \infty} \frac{m^x}{e^m \cdot x!}$$

x' \ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,0952	0,1813	0,2592	0,3297	0,3935	0,[illegible]	0,5034	0,5507	0,5934	0,6321
2	,0047	,0175	,0369	,0616	,09[illegible]	,1219	,1558	,1912	,2275	,2642
3	,0002	,0011	,0036	,0079	,0144	,0231	,0341	,0474	,0629	,0803
4	,0000	,0001	,0003	,0008	,0018	,0034	,0058	,0091	,0135	,0190
5	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0004	,0008	,0014	,0023	,0037
6	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0003	,0006
7	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001

x' \ m	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,8647	0,9502	0,9817	0,9933	0,9975	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000
2	,5940	,8009	,9084	,9596	,9826	,9927	,9970	,9988	,9995
3	,3233	,5768	,7619	,8753	,9380	,9704	,9862	,9938	,9972
4	,1429	,3528	,5665	,7350	,8488	,9182	,9576	,9788	,9897