MEC - INEP - CBPE

DIVISÃO DE APERFEIÇOAMENTO DO MAGISTÉRIO

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM CURRÍCULO E AVALIAÇÃO - 1970

TRANSCRITO DA

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE ENSINO PRIMÁRIO, SECUNDÁRIO E NORMAL

. CHEFIA DO ENSINO PRIMÁRIO - novembro de 1969

ÁREA DE MATEMÁTICA

DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Angel Diegues Marques

Adaptação do Capítulo II

(Sem autorizaçãO)

OS FUNDAMENTOS PSICOPEDAGÓGICOS DA APRENDIZAGEM DAS MATEMÁTICAS

(Adaptação do Capítulo II)

A didática tradicional, que foi até há poucos anos, e quase ousaríamos dizer que ainda é, a didática de nossas escolas normais, não se apoiava, por certo, numa moderna psicologia da aprendizagem.

Era uma didática de ascendência herbartiana, demasiadamente influenciada pelo positivismo, uma didática essencialmente técnica, metodológica: a didática das etapas formais. Caberia antes dizer que, mais do que uma didática, se reduzia a uma mera metodologia. O estudo dos métodos de ensino constituía seu objetivo essencial e quase que único.

Os educadores formados nessa corrente didática supervalorizavam o método de ensinar. Desinteressavam-se lògicamente pelas formulações teóricas, pelos fundamentos filosóficos e pelas bases psicológicas da educação.

O que lhes interessava era encontrar métodos que tornassem mais efetiva e cômoda a sua tarefa educativa.

Não obstante ser dada certa importância ao conhecimento psicológico da criança, na verdade não se interessavam pelos processos psicológicos da aprendizagem. Falava-se do valor da atividade, mas não se compreendia o papel da atividade - que era concebida, em geral como atividade manual, exterior - na aprendizagem.

Evidentemente, a psicologia da aprendizagem não havia ainda adquirido a importância que chegou a alcançar nos dias atuais. Como assinalou acertadamente Aebli, a didática era uma técnica de ensinar. Mas desta "técnica de ensinar" a didática passou a uma "direção de aprender", e o educador deve forçosamente compreender o sentido dessa mudança.

A didática científica, segundo o autor acima citado, tem por finalidade, precisamente, deduzir do conhecimento psicológico dos processos de formação intelectual as técnicas metodológicas mais capazes de produzí-los.

A didática tradicional se empenhou na "árdua busca de um melhoramento dos processos de ensino" (teaching). A didática moderna como nota R. Buyse, procura substituir essa busca vã "pelo conhecimento dos processos da aprendizagem" (learning).

Daí a necessidade de o educador conhecer os processos da aprendizagem - e neste caso especial, da aprendizagem das matemáticas - o mecanismo das operações psicológicas que estão na base do saber matemático.

Do contrário, agirá às cegas. Manejará com fórmulas ou com receitas, mas continuará a desconhecer o fundamento sôbre o qual elas se apóiam.

Todo trabalho de iniciação matemática pressupõe o conhecimento, por parte do educador, da gênese do número na criança, etapa prévia para a compreensão dos mecanismos que estão na base das operações.

Sem dúvida alguma, foi Piaget quem mais exaustivamente investigou, de forma experimental, a gênese do número na criança.

Observa o psicólogo genebrês que, ao nível pré-lógico, corresponde um período pré-numérico. Não há número pròpriamente dito no curso do pensamento pré-lógico, pré-operatório da criança (isto é, puramente intuitivo), mas apenas figuras perceptivas. Figuras estas que lhe permitirão estabelecer certas distinções entre os conjuntos de objetos e efetuar manipulações práticas, mas que não são operatórias.

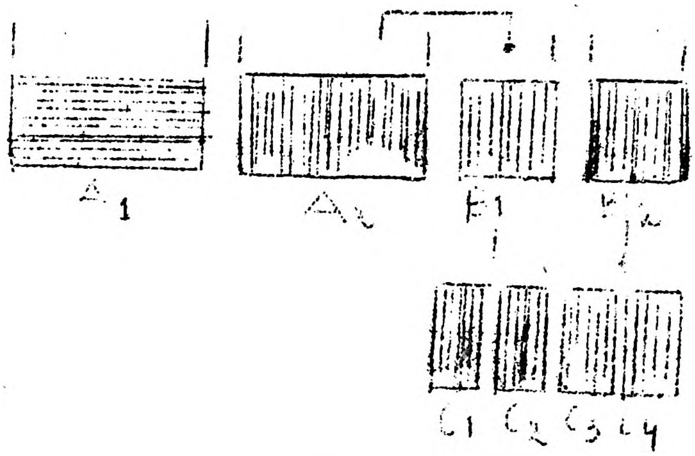
A êste propósito, assim se referiu Piaget, no Congresso que se reuniu em Genebra, em 1952, para debater a didática das matemáticas elementares: "A representação intuitiva não é suficiente para dar às crianças a noção do número, porque ela é estática. A imagem não conduz à operação; ao contrário, ela é um obstáculo ao pensamento operatório. Apenas as transformações dadas à imagem podem levar à compreensão das operações".

Não caberia nos objetivos dêste capítulo seguir passo a passo as investigações de Piaget sôbre a gênese do número tal como se encontram expostas na sua obra La Genèse du nombre chez l'enfant. Não obstante, indicaremos algumas das idéias básicas que Piaget expôs e que se referem às fontes psicológicas do número na criança. A idéia de conservação, afirma, constitui uma condição necessária de tôda atividade racional, sendo que o próprio pensamento aritmético não escapa a esta regra. A necessidade de conservação, do ponto de vista psicológico, constitui uma espécie de a priori funcional do pensamento.

As noções aritméticas se estruturam progressivamente em função, inclusive, das exigências de conservação. A análise psicogenética, realizada experimentalmente, no-lo mostrará.

De início, Piaget estuda a conservação das quantidades e a invariabilidade dos conjuntos.

Trata-se de investigar, primeiramente, a conservação das quantidades contínuas, para o que Piaget realiza a seguinte experiência:



Apresenta-se à criança dois recipientes cilíndricos que tenham a mesma dimensão (A_1 e A_2), e que contenham a mesma quantidade de líquido. (A_1 será o recipiente tomado por referência) Em seguida, despeja-se o conteúdo de A_2 em dois outros recipientes menores e semelhantes (B_1 e B_2). Pode-se levar adiante a experiência despejando-se o conteúdo de B_1 ou de B_2 em dois recipientes menores de igual dimensão, C_1 e C_2, C_3 e C_4, respectivamente.

Formular-se-á à criança as seguintes perguntas:

$(B_1 + B_2 = A_1)$?

$(C_1 + C_2 = B_2)$?

$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = A_1)$?

Deve-se, por conseguinte, submeter o líquido a tôdas as transformações possíveis, propondo, em cada caso, o problema da conservação, isto é, a igualdade ou não igualdade da soma com relação ao recipiente que foi tomado por referência.

Segundo as respostas, comprovaremos três fases evolutivas:

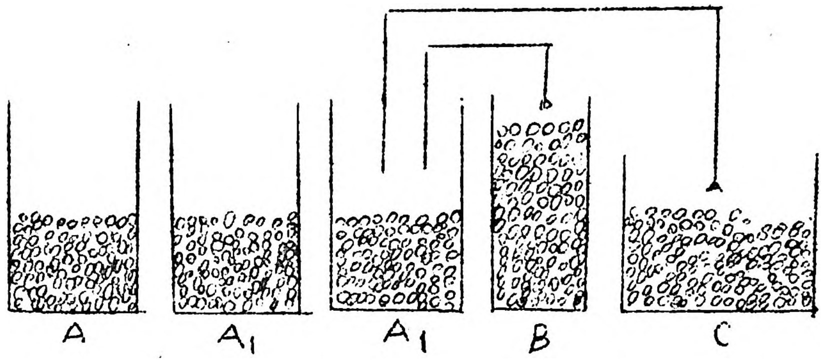
1ª - Uma fase em que a criança considera como natural que a quantidade do líquido varie segundo a forma e as dimensões dos recipientes em que foi vertido.

2ª - Uma fase segunda, que constitui um período de transição e de elaboração, em que a noção de conservação se constitui progressivamente. Ela é descoberta em alguns casos e não em outros, segundo a diferença dos recipientes.

3ª - Na terceira fase a criança postula desde o começo e sem vacilação, a conservação.

O segundo aspecto, estudado igualmente de forma experimental, refere-se à conservação das quantidades descontínuas.

Pede-se à criança que encha um recipiente com pérolas, colocadas uma a uma cada vez que o experimentador, por seu turno, deposite uma unidade em outro recipiente, procedimento que assegura a igualdade do conteúdo dos recipientes. Em seguida, pergunta-se-lhe sôbre a igualdade das duas quantidades totais assim obtidas, sendo iguais ou desiguais os recipientes. Poder-se-á ainda verter, como indica o esquema, o conteúdo de um dos recipientes em recipientes de forma diferente, propondo-se o problema da igualdade. (Se há mais ou menos pérolas em B do que em A_1 ou em C do que em A_1).



Piaget distingue igualmente neste caso três fases evolutivas.

Na primeira (aproximadamente 5 anos), há uma total ausência de conservação. "A criança não sòmente crê nas mudanças de quantidade global quando se transfere uma coleção qualquer de um recipiente a outro de forma diferente, como também acredita que o colar confeccionado com as pérolas não é do mesmo comprimento em ambos os casos."

Na segunda fase, poder-se-á observar, como no caso das quantidades contínuas, um "comêço de constituição de conjuntos permanentes", caracterizado pelas soluções intermediárias, situadas na metade do caminho, "entre a quantidade bruta sem invariabilidade e a quantificação pròpriamente dita".

Na terceira fase (6 anos e meio aproximadamente), a criança não necessita reflexionar para estar segura da conservação das quantidades totais: está segura _a priori_.

Nesta terceira fase, o raciocínio se torna reversível. A partir dêsse momento a criança é consciente de que a transferência do conteúdo de um recipiente para outro não modifica a quantidade. A convicção da criança não se baseia já em uma verificação empírica e momentânea, mas em uma evidência lógica que é devida à reversibilidade do pensamento.

A criança conseguiu chegar à evidência de que a quantidade necessariamente se conserva. Alcançou igualmente a consciência da "reversibilidade das operações". Pode encontrar - observar Piaget - a forma inicial, refazer o todo com as partes, compesar cada deformação com uma transformação inversa.

É nessa terceira fase que a criança "considera como evidente, não já empìricamente comprovável mas lògicamente evidente, que a quantidade não se modificou durante o processo de transferência de um a outro recipiente.

Daí que um número só é intelegível se as permutações das quais são suscetíveis os seus elementos não alteram a sua grandeza, isto é, no caso de ser concebido como idêntico a si mesmo, qualquer que seja a posição relativa de suas partes constitutivas. É nesta fase precisamente que o número se torna inteligível para a criança.

Piaget examina igualmente - e sempre de forma experimental - o problema da correspondência (cardinal e ordinal) e da equivalência das coleções correspondentes, começando pelo que êle denomina de correspondência provocada. Isto é, aquela que se verifica entre objetos heterogêneos mas qualitativamente complementários, tais como um ôvo e um oveiro. (*)

Do mesmo modo, verificam-se três fases evolutivas. Na primeira não existe nem correspondência nem equivalência. Se se convida a criança a pôr um copo ao lado de cada uma de seis garrafas postas em fila, copo que deve ser retirado de uma bandeja com muitos outros, ela coloca uma quantidade de copos em número muito superior ao das garrafas, preenchendo o mesmo espaço linear que as garrafas ocupam.

Na segunda fase se evidencia uma correspondência têrmo a têrmo, mas de modo algum uma equivalência durável.

As crianças declaram, ao notar a correspondência visual entre os dois alinhamentos, que há tantos copos quantas garrafas, mas logo deixam de crer nesta equivalência desde que se separem as parelhas de têrmos correlativos ao distanciar-se ou ao aproximar-se os têrmos de cada uma das duas coleções.

Só numa terceira fase é que a criança nota a correspondência têrmo a têrmo e a equivalência durável das coleções correspondentes.

(*) Oveira: vasilha de servir ovos à mesa (Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguêsa, 11a. ed., Rio, 1964).

Piaget verifica idênticas comprovações ao investigar a correspondência espontânea e o valor cardinal dos conjuntos. (1) Tôdas as experiências, afirma Piaget, quer se trate de reproduzir coleções que se apresentam sob a forma de simples aglomerações, de figuras abertas ou fechadas, ou de simples agrupamentos lineares, "nos mostram que no primeiro nível (em média até os quatro e meio e cinco anos) a criança avalia as quantidades descontínuas ou conjuntas como se se tratasse de quantidades contínuas, isto é, grandeza espaciais". (2)

Há uma irreversibilidade completa do pensamento. A criança só possui "totalidades perceptivas". É o caráter global ou sincrético do pensamento infantil ao qual êste campo da atividade psicológica da criança. não escapa.

A segunda fase nos mostra uma mentalidade mais rica, mais móvel, "porém sempre limitada à intuição sensível e incapaz ainda de composições propriamente operatórias e lógicas. Com mais precisão se pode dizer que ela é semi-operatória".

Na terceira fase ocorre um progresso decisivo, em que a correspondência conduz a uma equivalência durável e necessária. As coleções permanecem equivalentes independentemente de sua configuração ou da disposição dos elementos.

---

(1) Deve-se entender por correspondência espontânea aquelas situações "em que a criança está obrigada a inventar por si mesma a correspondência e a utilizá-la da forma que melhor lhe convenha". "O que se deve aprender é o esfôrço livre da criança para avaliar o valor cardinal de uma coleção qualquer". O problema com que a criança depara já não é do de "Ponha um objeto A diante de cada objeto B", mas "Eis aí uma certa quantidade de objetos; pegue tantos quantos há aqui". O que se investiga é um simples problema de avaliação ou de medida da quantidade (do valor cardinal de uma coleção).

(2) Se pedimos a uma criança de quatro e meio a cinco anos que coloque tantas fichas de côr verde quantas fichas vermelhas há alinhadas diante dela, a criança colocará um número muito maior de fichas vermelhas ocupando, porém, o mesmo espaço que ocupam as fichas verdes.

Se de duas fileiras iguais de fichas (uma fileira verde e uma outra vermelha) colocadas paralelamente se procede à separação das fichas de uma delas (vermelhas), sendo portanto maior o espaço que ocupam, a criança não admitirá a equivalência das duas fileiras e dirá que há mais fichas na que ocupa um espaço maior. Só a criança de seis a sete anos colocará uma ficha debaixo da outra e continuará admitindo a igualdade da fileira, embora as fichas estejam separadas e varie o espaço que ocupam.

Nota-se aqui uma evolução psicológica, destacada de modo muito claro por Piaget, que vai da percepção global à operação graças a uma reversibilidade progressiva das ações e do pensamento.

A partir do momento em que a criança conquistou a noção da <u>conservação das quantidades</u> e a noção da <u>conservação das equivalências</u>, pode, por sua vez, alcançar a noção de número. Como afirmamos antes dessa fase não há número mas só figuras pré-numéricas e figuras perceptivas anunciadoras do número.

Agora se pode perguntar como nasce o número na criança, isto é, como a criança chega a construir o número a partir de um ponto de vista operatório.

Segundo pensa Piaget, duas condições se fazem necessárias
A primeira delas é a idéia da <u>conservação do todo</u>.

A conservação do todo se baseia nas operações lógicas, que, por sua vez, se fundamentam na reversibilidade das ações. A criança alcança a noção de conservação do todo quando percebe que o todo é um conjunto de partes. É o problema da relação entre o todo e as partes. (Inclusão de uma classe parcial numa total).

Piaget realiza a seguinte experiência, para poder saber em que medida a criança compreende a relação entre uma quantidade e as partes de que se compõe:

Apresenta-se à criança uma caixa que contenha "contas de madeira" (classe B), tôdas pintadas de marrom (classe A), com exceção de duas, pintadas de branco (classe A_1).

Pergunta-se então à criança se há na caixa mais pérolas de madeira (B)(que são o todo) ou mais pérolas escuras (A) (que são uma parte). Se o problema é de difícil compreensão, poder-se-á perguntar à criança se o colar que se poderia fazer com as pérolas de madeira é mais comprido ou mais curto do que o que se poderia fazer com as pérolas marrons ou escuras.

As respostas obtidas permitem que se notem três fases na evolução (que lògicamente correspondem às três etapas que se podem distinguir na evolução da conservação de quantidades e na correspondência ordinal e cardinal).

Na primeira, a criança será capaz de compreender que a classe B contém mais elementos do que a classe de ordem A, e isto em razão, como observa Piaget, de que "não consegue pensar simultâneamente o todo B e as partes A e A_1, o que implica dizer que lògicamente ainda não concebe a classe B como resultante da adição $B = A + A_1$, nem a classe A como resultante da subtração $A = B - A_1$".

Na segunda fase, a criança vai pouco a pouco compreendendo que as classes de ordem B contêm mais elementos do que as classes incluídas de ordem A. Mas êste descobrimento ela o realiza intuitivamente, sem proceder ainda por via dedutiva e operatória.

Sòmente na terceira fase é que a criança compreende que a classe includente B é maior do que a incluída A, dado que ela se coloca, de antemão, no ponto de vista da composição aditiva ($B = A + A_1$ e $A = B - A_1$). Isto é, a criança consegue compreender isto no momento em que supera o nível pré-lógico e alcança o nível operatório.

Por outro lado, Piaget nos faz ver que "a classe, a relação assimétrica e o número são três manifestações complementares da mesma construção operatória aplicada às equivalências, às diferenças, ou às equivalências e diferenças reunidas".

Portanto, é precisamente nesta terceira fase que a criança é capaz de incluir, seriar e numerar simultâneamente, tendo já conseguido fazer móveis as avaliações intuitivas do comêço e já tendo alcançado o nível da operação reversível.

Êste sincronismo se justifica psicològicamente; "por um lado, sendo cada número uma totalidade nascida da reunião de têrmos equivalentes e distintos, é preciso saber ao mesmo tempo incluir e seriar para constituí-lo. Por outro, se a qualificação intensiva, própria das classes ($A < B < C$, etc.), não supõe os números particulares para poder acabar-se, faz supor, pelo menos, que o sujeito seja capaz de construir êstes últimos, sem os quais as relações de extensão perdem todo o seu sentido concreto.

O evidente é que se o número encerra ou supõe a classe, esta, inversamente, se apóia no número.

A segunda condição requerida é a de ordem. Para que haja correspondência numérica é preciso uma condição de ordem. É preciso proceder por ordem no estabelecimento da correspondência numérica, tendo-se o cuidado de não fazer corresponder um elemento com os elementos precedentemente contados e igualmente de não esquecer um elemento.

Trata-se, pois, de que a criança serie, ordene, uma série de elementos. Piaget chegou igualmente a comprovar três fases evolutivas em tôrno da seriação de tamanhos.

Dá-se à criança uma série de tabuinhas, bastões ou reguinhas de diferente comprimento, e pede-se-lhe que faça, por exemplo, uma escada com os diferentes bastões.

Se é muito grande a diferença entre os bastões, a criança é capaz de ordená-los de conformidade com o tamanho dêles. Mas se a diferença é apenas de meio, ou de um centímetro, o ordenamento se torna mais difícil.

Experimentalmente se nota a existência de três fases evolutivas. Na primeira, as crianças formam pares de bastões de desiguais tamanhos, mas são incapazes de ordená-los. Na segunda etapa, a criança forma pequenos conjuntos, e logo depois, mediante novas tentativas e através de sucessivas correções, chega a construir a série. Na terceira etapa, a criança, que já chegou a alcançar a fase do pensamento operatório, conseguiu um método: procura o menor, compara-o com os outros e o coloca. Em seguida, pega uma regüinha ou bastão e repete a operação, e assim por diante até terminar. A série se constrói sem vacilações e sem erros. A criança nota que cada regüinha é menor do que a que a segue e maior do que a que a antecede, isto é, nota a reversibilidade das operações.

Em suma, para que se construa o número deve haver integração das partes no todo e seriação de tamanhos.

O número é simultâneamente um sistema de classes e um sistema de seriação. O que quer dizer que o número está integrado na classe formada por si mesmo e seu sucessor (o dois está integrado no três, o três no quatro, etc), e que o número está incorporado em uma série, isto é, em uma ordem de sucessão.

Para alcançar o número é preciso superar o ponto de vista qualitativo e realizar, segundo Piaget, "uma nova síntese". Esta síntese exige que se faça abstração das qualidades particulares dos elementos, que se veja cada elemento como equivalente aos outros, independentemente das suas qualidades. Por outro lado, os elementos devem poder ser postos numa ordem, e, por conseguinte, estabelecer-se-ão diferenças. Haverá um primeiro elemento, um segundo elemento e um N.º elemento.

O número é, portanto, equivalência em geral e ordem em geral. Cada unidade é equivalente a tôdas as outras e, ao mesmo tempo, distinta, segundo a ordem que ocupa na série.

Será preciso, antes de iniciar o aluno na aprendizagem dos números e das operações, certificar a madureza alcançada pela criança para conseguir essa aprendizagem. Lògicamente será necessário comprovar se a criança adquiriu consciência da conservação dos conjuntos e da conservação das equivalências, e se é capaz de construir os números desde um ponto de vista operatório (noção de relação entre as partes e o todo e capacidade de seriação de tamanhos). O professor pode repetir as provas que descrevemos, realizando-as com os alunos. De tal maneira poder-se-á ter uma idéia muito aproximada do grau de madureza da criança para a aprendizagem das matemáticas. Claro está que estas provas não terão a exatidão nem o valor preditivo de um teste, mas serão igualmente de suma utilidade. De todos os modos, o professor deverá, antes de iniciar o aluno na aprendizagem do número, realizar uma série de exercícios de conservação das quantidades e das equivalências, assim como de conservação do todo e de seriação. Constituirá um êrro tentar omitir êste período de "prontidão".

Seja qual fôr a posição que cheguemos a adotar diante do problema da relação entre as matemáticas e a lógica - isto é, diante do problema de se as matemáticas "são distintas da lógica ou integralmente redutíveis a ela" a partir de um ponto de vista epistemológico-genético" -, o evidente é que didàticamente resulta de grande interêsse conhecer como se forma a lógica na criança, verificar as etapas ou fases que esta atravessa, com relação ao desenvolvimento das etapas da aprendizagem das matemáticas a que fizemos referência.

O educador notará assim o caráter necessàriamente evolutivo de tôda didática.

Piaget fixou em quatro as etapas ou fases fundamentais por que passa a criança. (As idades que êle indica correspondem a crianças genebresas).

A primeira fase chega até os dois primeiros anos de idade, aproximadamente. Nela a criança consegue fazer certas "coordenações sensório-motoras em que se distinguem, de forma prática e não representativa, certas conexões e certas generalizações. Estas chegam a um esquematismo que constitui, sem dúvida, a subestrutura das estruturações lógicas posteriores e à formação de uma invariante elementar (esquema do objeto permanente), que representa o ponto de partida de formas posteriores de conservação".

Na segunda fase, que vai dos dois aos sete-oito anos, se dá um período representativo pré-operatório "no curso do qual as aquisições sensório-motoras são reelaboradas no plano das representações, mas não estendidas às situações mais complexas que envolvem transformações pròpriamente ditas, por oposição às configurações". Piaget observa que, por falta de operações reversíveis, o sujeito não chega a compreender a conservação dos conjuntos (quantidades descontínuas) nem das quantidades contínuas no caso de virem a modificar-se as configurações especiais. Nem sequer, acrescenta Piaget, chega a dominar as transitividades elementares:

$$A = C \text{ se } A = B \text{ e } B = C \text{ ou } A < C \text{ se } A < B \text{ e } B < C.$$

Portanto, na falta de tôda estruturação pròpriamente operatória, há ausência de lógica representativa. Na terceira fase, que vai de sete-oito anos a onze-doze anos, é que se constitui uma lógica chamada de "operações concretas" que "se refere aos objetos, mas ainda não às proposições". As operações desta lógica não abarcam mais de que "uma parte da lógica de classes (com uma reversibilidade que consiste em inversão ou negação $(A - A = 0)$ e uma parte da lógica de relações com uma reversibilidade que consiste em reciprocidade $(A = B) \rightarrow (B = A)$, mas que incluem a constituição de estruturas de conjunto que consistem em classificações, seriações, correspondências, etc, que chamamos de "agrupações elementares"; por exemplo: $A + A' = B$; $B + B' = C$, etc; $B - A' = A$, etc.; $A + A' = A$; $A - A = 0$; $(A+A') + B = A + (A'+B)$, mas $(A+A) - A \neq A + (A \quad A)$.

Durante esta terceira etapa é que se realiza a aprendizagem das matemáticas elementares.

A quarta etapa ou última etapa se inicia aos onze ou doze anos. A partir dêsse momento se constitui a lógica formal.

Verificada a existência da necessária madureza para iniciação matemática da criança, torna-se imprescindível para o educador conhecer o processo do pensamento operatório na aprendizagem das operações matemáticas.

A psicologia sensual empirista ressaltava já o valor de elemento sensível na aprendizagem das matemáticas. John Stuart Mill afirmava: "Tôdas as verdades fundamentais desta ciência (a "ciência dos números") baseiam-se nos testemunhos dos sentidos. Quando hoje desejamos introduzir o espírito da criança no estudo da aritmética, quando queremos ensinar os números e não sòmente cifras, procedemos, como acabamos de dizer, pelo testemunho dos sentidos".

Esta psicologia, em que a didática tradicional se baseava, põe em evidência o valor dos dados intuitivos, isto é, de uma das condições indispensáveis para a realização operatória da aprendizagem.

Mas como observam os "operacionistas", esta psicologia constrói o conhecimento como um esquema "atomístico", através da agregação de um elemento a outro, mas "esquece que são precisamente as relações mútuas as que definem e esclarecem as diferentes noções e operações".

A didática operatória entende que, se desejamos que o aluno assimile a noção, deve fazer-se com que tenda a aplicar o elemento apresentando em uma atividade reflexa, a fazer com que o elemento sensível seja submetido a uma atividade relacionante. Sabe-se, por outro lado, que isso reforçará o interêsse da criança, interêsse êste que em grande medida depende da atividade que se lhe permita desenvolver. Lay, um dos precursores teóricos da escola ativa, pôs do mesmo modo em evidência a necessidade de criar no sujeito as representações intuitivas dos números elementares. Destacou igualmente a importância das sensações tácteis como complemento das visuais e das sensações cinestésicas, que se produzem quando a criança toca, manipula qualquer das fichas com que os números são representados.

Lògicamente, o haver êle acrescentado as sensações cinestésicas provocadas pelo manejo, pela manipulação e a exploração ativa das formas exteriores representa um avanço sôbre Mill e sua psicologia. Não obstante, apesar da introdução dêste elemento motor, "a impressão continua a ser para Lay, observa Aebli, um processo essencialmente receptivo".

Nesta evolução do pensamento didático, o instrumentalismo de John Dewey marca a raptura definitiva com a velha didática tradicional. Para Dewey, o pensamento constituir-se-á num instrumento para a ação. Êste colocará o pensamento no contexto da ação. O "aprender fazendo" resume o pensamento do pedagogo norte-americano. O pensamento como instrumento da ação adaptadora.

Mas a concepção de Dewey, mais pedagógica e filosófica que psicológica, deixou pendente o problema da natureza intrínseca do pensamento.

Será Piaget que irá elaborar a tese da natureza operatória do pensamento, o que irá mostrar o valor psicológico do fazer, do operar, na interpretação profunda da gênese da aprendizagem; o que porá em evidência a importância das operações na constituição das noções fundamentais do pensamento, qual o papel que as atividades práticas desempenham na elaboração das noções, e, especialmente, nas noções matemáticas que, em especial, nos interessam neste trabalho.

Em síntese: Piaget colocou em evidência a natureza operatória do pensamento. Para o psicólogo genebrês o espírito se compõe de "imagens", conteúdos rígidos e esquemas de ação ou "operações".

Tôda operação mental deve ser considerada como uma forma interiorizada das operações concretas. Por isso, nos primeiros anos de vida da criança, a realização efetiva da operação é anterior à operação mental.

As operações mentais, afirma Piaget, devem ser consideradas como formas interiorizadas das operações concretas. Daí o papel fundamental das atividades práticas na elaboração das noções. Como observou Piaget, se de começo a criança necessita de suporte do real - fazê-lo, realizá-lo efetivamente na prática -, posteriormente não está obrigada à realização material de todo ato, pois já o executa interiormente sem necessidade de executá-lo realmente.

A ação já foi interiorizada e através dêsse processo de interiorização o ato efetivo chega a ser a representação do ato.

A didática tradicional ensinou os mecanismos das operações matemáticas pelo "hábito estereotipado" a partir de um esquema mecânicamente aprendido.

A falta de compreensão comporta necessàriamente a estereotipia da reação. Se o aluno não compreende, observa Aebli, se lhe escapa o significado real, o professor se vê obrigado a fazer com que êle adquira um hábito rígido que assegure o desenvolvimento da reação buscada mediante um mecanismo exterior invariável.

Posteriormente, o recurso didático, que não foi além do marco tradicional, consistiu em "fazer" imaginar, sem que a criança visse, manipulasse ou atuasse. Convidava-se o aluno a que dividisse mentalmente um pastel ou uma laranja, e as partes em que se dividiam eram meios, têrços, quartos, etc.

Aebli observa que uma forma posterior para introduzir operações novas consistiu em empregar imagens ou objetos completamente <u>preparados, os quais não podiam ser transformados nem manejados</u>.

O método indicado pela didática operatória consiste, ao contrário, precisamente em não apresentar imagens preparadas, mas em fazê-las surgir pelo acionar mesmo dos alunos.

A imagem, vale recordar a concepção de Piaget, constitui uma espécie de suporte do pensamento que, ao simbolizar as operações, torna possível a sua evocação interior.

A criança alcança a <u>interiorização</u> (um dos três aspectos ou etapas do pensamento operatório), isto é, a criança será capaz de executar interiormente a ação executada efetivamente sôbre o real. Mas, para isto, é preciso que execute pràviamente de forma efetiva sôbre o real. Nos primeiros anos a criança não possui capacidade para realizar o ato mentalmente, para "imaginá-lo" ou "representá-lo".

O aluno só adquire uma operação apresentada imitando-a interiormente. Quando falta a imitação interior, não há aquisição.

Daí a exigência da didática operatória, totalmente realizada no método que estamos a expôr de conseguir a realização das operações mediante manipulações efetivas e experiências concretas, e já não apenas na imitação interior das operações do professor.

Piaget nos leva a distinguir dois conceitos básicos para a compreensão da índole das operações matemáticas e conseqüentemente para a orientação da aprendizagem de tais operações, isto é, para a didática das matemáticas: o hábito estereotipado da operação.

Múltiplos conhecimentos matemáticos podem ser aprendidos e, de fato, a didática tradicional os fazia aprender, como já dissemos como hábito estereotipado. Constitui um caso típico o ensino das tábuas de multiplicar. Cada combinação de cifras, como observa Aebli, "se adquire como reação habitual na qual a operação visual ou auditiva de duas cifras (3X4) suscita o enunciado de uma terceira (12)".

O hábito, sendo uma conduta estereotipada e rígida, como tôda reação pré-operatória, é irreversível. Só a "operação" que é inteligente é reversível.

O hábito, como afirma Piaget, é irreversível "porque sempre tende no sentido único para o mesmo resultado". Inverter um hábito, escrever da direita para a esquerda, é adquirir nôvo hábito. Ao contrário, a inteligência é reversível, sendo que "uma operação inversa da inteligência está psicològicamente incluída com a operação direta".

A aquisição da consciência da reversibilidade das operações desempenha um papel importante na construção dessas noções. Afirma Piaget: "Pode-se encontar a forma inicial, refazer o todo com as partes, compensar cada deformação com uma transformação inversa".

O pensamento não é uma mera acumulação estática de dados, uma "coleção de conteúdos de consciência", mas um jôgo de operações vívidas e atuantes. O pensamento é operatório. Daí que tenhamos chamado operatória à didática que provém das idéias psicológicas e das concepções epistemológico-genéticas de J. Piaget. Didática que orienta a aprendizagem de tal modo que põe em jôgo os mecanismos operatórios que permitem a incorporação, como fruto da própria atividade do sujeito, dos novos conhecimentos. Daí tratar-se especialmente de uma didática ativa. Entenda-se a atividade em seu sentido direto e fundamental, como acionamento dos mecanismos operatórios do sujeito que aprende. O aprender se constitui, pois, num ato único e individual. Requer-se das crianças que encontrem por si mesmas a nova noção, e para isso é preciso que seja dirigida a procura dêsse achado.

O pensamento estará constituído por "operações interiorizadas que po cedem, durante o desenvolvimento da criança, por interiorização de ações efetivas". Daí a necessidade de colocar nas mãos da criança, insistimos, o material que permita a realização das operações efetivas.

Aebli recomenda que se dê ao aluno, na medida do possível, a oportunidade de executar materialmente operações durante os seus ensaios ou tentativas. Deve-se-lhe dar, reafirma Aebli, a possibilidade de efetuar efetivamente operações de transferência, composição, decomposição, e transformação.

A operação será precisamente compreendida, como já dissemos, quando o sujeito estiver em condições de realizá-la na sua forma direta e inversa, isto é, quando a criança alcança a consciência de sua reversibilidade. (A subtração como operação inversa da adição, a divisão como operação inversa da multiplicação).

Aebli observou que, se damos às crianças esta operação:15X14=...:15= os alunos fazem a divisão como se se tratasse de uma nova operação, sem dar-se conta de que se trata da primeira operação invertida.

Isto demonstra, ao ver de Aebli, que o ensino da aritmética deve relacionar permanentemente a operação direta com a operação inversa, e prova, por outro lado, "que o ensino das operações não faz com freqüência senão estabelecer reflexos sem pôr em evidência o mecanismo reversível dos sistemas operatórios".

O terceiro aspecto do pensamento operatório, pôsto em destaque por Piaget, é a associatividade, isto é, a possibilidade de alcançar um mesmo resultado seguindo diferentes caminhos.

O pensamento pode chegar a um mesmo resultado mediante os mais diversos procedimentos.

Sigamos um exemplo de Piaget sôbre a "associatividade das operações". Admitimos por exemplo, que fracionando uma bolinha de argila em pedaços A, A' e B' faço primeiro com A e A' um só pedaço B, para em seguida lhe acrescentar B', ou deixo de lado A para juntar (A' + B'). No nível lógico nenhuma criança duvida de que (A+ A') + B = A + (A'+B'), o que antes não lhe parecia necessàriamente idêntico.

Estas operações resistem mais ao esquecimento do que os hábitos isolados, pois, estando agrupados em sistemas de conjunto, observa Aebli, tôdas as operações "aparentadas" se baseiam umas nas outras.

As imagens passam a ser representações, a operação chega a ser um ato puramente mental. Como observa Natalis, a terceira condição que Piaget exige do pensamento operatório provém direta e concretamente da manipulação de materiais, visto que, em princípio, tôdas as decomposições possívcis são descobertas, verificadas e controladas; as crianças chegam aos mesmos resultados por diferentes caminhos.

" Se a percepção de relações aumenta a facilidade da aprendizagem, como afirma Homer Reed, é de esperar que um método que torna fàcilmente perceptíveis as relações será vantajoso para o ensino". O método Guisenaire apela precisamente para a atividade relacionante (número-relação). "O material Guisenaire orienta de modo discreto o espírito da criança para a descoberta dessas relações". O valor do método, acrescenta, reside na importância que êle atribui ao número-relação.

A base do material Guisenaire é a relação, afirma Gattegno "O valor matemático do método que surge do material Guisenaire reside no fato de que é suscetível de ser expresso em têrmos de relação".

Todos os números serão "descobertos" mediante uma atividade relacionante, sendo que tôdas as operações matemáticas surgem das relações que podem ser objetivamente estabelecidas por meio do emprêgo das regüinhas. (A citação dêste método é um exemplo.)

Wallon afirmava que a noção de relação (menor, maior, etc.) é na criança anterior à noção de número e desempenha um papel capital na estruturação do número. A. Conte, por sua vez, assinalava que "o espírito matemático consiste em ver sempre como ligadas entre si tôdas as quantidades que um fenômeno na vida pode apresentar e deduzir umas quantidades das outras".

Mialaret recorda, seguindo as idéias de Piaget, que o conhecimento matemático nasce e se desenvolve pela interiorização das ações concretas e da organização dos esquemas operatórios.

Três são as estruturas (3) fundamentais que caracterizam as operações lógico-matemáticas na criança: as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas.

Segundo Piaget, a psicogênese das operações matemáticas na criança sugere a idéia de uma construção contínua dessas estruturas com relação à elaboração das estruturas operatórias da inteligência em geral. (4)

A Gestalt trouxe a idéia da existência de "formas de conjunto", que precedem à dissociação em elementos e cuja característica como disse Piaget, é uma composição aditiva e irreversível.

(3) "... as operações não se vão agregando livremente umas às outras, mas, ao contrário, se coordenam necessàriamente em estruturas de conjunto, cujas leis de totalidade se impõem de modo organico e resistem ao arbitrário individual." Piaget, J.

(4) Piaget considera que existe um certo parentesco entre as estruturas mães" dos Bourbaki e as estruturas mais elementares, que são elaboradas no curso do desenvolvimento das operações lógico-matemáticas na criança".

Mas "essas Gestalt" já não são suficientes - segundo o psicólogo genebrês - para explicar o mecanismo das operações intelectuais, e êle as substituiu pela noção de estruturas operatórias de conjunto.

As estruturas algébricas se encontram já no nível "sensório-motor", numa forma simplesmente prática, e, de modo especial, a partir do nível das "operações concretas".

O fato de que uma operação do "grupo", enquanto entre matemático, corresponda sempre uma operação inversa, expressa, segunda Piaget, a verersibilidade das ações transformadas assim em operatórias e, no plano prático, expressa a <u>conduta de retôrno</u>. A associatividade corresponde à possibilidade de alcançar o mesmo ponto de chegada por diferentes caminhos, isto é, no plano prático, à conduta de "rodeio".

Mas essas estruturas algébricas adquirem a sua maior importância ao nível das operações concretas. É neste nível que a criança alcança a "constituição de invariantes", como já dissemos. Isto é, é nesse nível do desenvolvimento que a criança, que até então negava a conservação das formas mais elementares de quantidades, "chega a considerar como necessária a invariabilidade dos conjuntos lógicos e numéricos dos comprimentos e das distâncias, das quantidades físicas contínuas, etc."

As "estruturas de ordem" (seriação, correspondências seriais, etc.) são elaboradas paralelamente e sincrônicamente com as estruturas algébricas, mas "não a partir dos sistemas de classe, senão dos sistemas de relações".

Finalmente, no que diz respeito às estruturas topológicas, é do máximo interêsse comprovar - afirma Piaget - "que as intuições espaciais mais elementares da criança, pelo menos no plano da representação em imagens e do desenho, são de natureza topológica". Estas estruturas nos interessam menos do ponto de vista do método que expomos.

Gattegno nos mostrou como a criança, mediante o emprêgo das regüinhas Guisenaire, não tarda em reconhecer as três estruturas fundamentais das matemáticas modernas: as relações de equivalência, as relações de ordem e as relações algébricas. Descobre as <u>relações de equivalência</u>, isto é, que as regüinhas de uma mesma côr têm o mesmo comprimento e as de côres diferentes têm, por sua vez, comprimento diferente.

As <u>relações de ordem</u>: tomando-se duas regüinhas ao acaso A e B no conjunto, a criança pode dizer se A é igual a B ou se A é distinta de B.

Tal comparação entre regüinhas está profundamente estruturado, afir ma Gattegno, quando a criança pode combinar parelhas de desigualdades para formar um conjunto transitivo de proposições: se A é menor do que B e B menor do que C, A é menor do que C.

Finalmente, <u>as relações algébricas</u>, que resultam da introdução de uma operação sôbre o conjunto de regüinhas. **A criança combina espontâneamente suas regüinhas** de diversos modos para produzir uma variedade extraordinária de esquemas coloridos. "Se adquire consciência de que duas regüinhas, colocadas uma depois da outra, substituem, quanto ao comprimento, uma outra regüinha ou outras duas colocadas ponta a ponta, aí então introduziu uma álgebra no conjunto. Uma álgebra representa pelo sinal + cujas propriedades evidentes são: $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$ (continuidade e associatividade); de $a + b = c$ se extrai uma nova notação: $a = c - b$ ou $b = c - a$. A subtração aparece como a operação inversa da adição e esta como a operação inversa da subtração".

Tôda ação didática deve tender a pôr em jôgo as estruturas a mobilizar os esquemas asssimilatórios que irão permitir a inserção do conhecimento. Ou, como assinala Aebli, tôda ação didática deve levar a que se "provoque, mediante reativos adequados, a realização efetiva e variada das operações que são o fundamento do conhecimento".

Nisso reside o sentido da atividade, que é atividade exterior, mediante a qual se consegue a interiorização, mas que é fundamentalmente atividade interior, operatória.

A já tão citada obra de Aebli exemplifica, precisamente mediante um tema matemático, a aplicação de uma didática operatória.

A operação constitui o elemento ativo do pensamento. Todo conhecimento exige sua inserção em uma estrutura. Tôda aprendizagem exige a atividade do sujeito a fim de movimentar as estruturas assimilatórias. Todo conhecimento que não se totalize em estruturações não é durável nem generalizável.

A atividade é, em qualquer etapa evolutiva, uma exigência básica do básico do mecanismo da inteligência.

Provocar as operações que ponham em jôgo os esquemas assimilatórios é, em síntese, princípio básico de tôda ação didática.

Provàvelmente nenhum recurso didático resulta mais apto para que se realizem estas exigências do que um material adequado. A compreensão dos fundamentos psicopedagógicos, que tentamos esboçar, assegurará a sua mais eficaz aplicação.

Talvez seja interessante acrescentar, neste capítulo dedicado aos problemas psicológicos da aprendizagem das matemáticas, uma breve referência à importância do aspecto afetivo na aprendizagem desta disciplina. Consideramos ser êste um aspecto com fequência descuidado pelos educadores.

Qual o motivo, cabe-nos perguntar, de que um grande número de estudantes intelectualmente bem dotados abandonem êsses estudos que exigem uma base matemática? Por que em muitos países em que existe um ciclo colegial polifurcado no ensino médio a especialidade "matemáticas" possui escassa quantidade de alunos, enquanto que seguem o curso colegial clássico muitos alunos que não apresentam uma definida vocação para êsses estudos?

Acreditamos que o que os afugenta seja o "fantasma" das matemáticas. Êstes alunos experimentaram um fracasso inicial traumatizante. Diante de um símbolo matemático, uma operação ou um problema sofrem uma verdadeira inibição intelectual.

Trata-se, segundo Mialaret, de uma "inibição intelectual que produz um verdadeiro condicionamento". Muitos dêsses alunos, acrescenta, sofrem de "complexo antimatemático" que gravitará sôbre a sua conduta durante tôda a trajetória de sua vida estudantil. Diz Mialaret: "A pedagogia do fracasso ó a origem de numerosas inadaptações escolares e sociais, cuja solução exige logo muitos esforços".

O professor evitará erros na orientação da aprendizagem se atende às reflexões psicopedagógicas que expusemos, se guia a aprendizagem levando em conta a psicogênese do número, se leva em consideração a natureza operatória do pensamento e, de modo especial, do pensamento matemático; se considera as diferenças individuais e realiza uma educação "sob medida". Em suma, se o método didático que aplica se fundamenta nos processos da aprendizagem que acabamos de expor.

A "pedagogia do êxito", aplicável a tôdas as disciplinas, é em especial aplicável às matemáticas, principalmente se levamos em conta a graves conseqüências dos fracassos iniciais na aprendizagem posterior dessa disciplina.

Rio de Janiero, GB, 3 de dezembro de 1970

/EFC

Um segundo passao consiste em mutilar a construção, deixando as reglinhas da esquerda, mas não mais colocando as da direita. A criança é obrigada, dêste modo, a encontrar "mentalmente" a reglinha complementária. Isto é, sem "tentativas" mâteriais, ao ver a reglinha amarela (5) deverá dizer ou assinalar a que falta para formar oito (3).

Num terceiro passo se destrói tanto a formação da esquerda como a da direita. As reglinhas são apresentadas ao aluno ao acaso e êste deverá saber indicar a que falta agregar para obter o número correspondente. Mostra-se a reglinha 6 e a criança diz que "com 2" forma 8, ou a 4, e deverá acrescentar que "com 4" forma 8.

Num quarto passo, o quadro a que nos referimos mais acima é mutilado e reconstruído do seguinte modo:

	8			8	
5			3		
		1			7

Segunda etapa

Os mecanismos adquiridos com a primeira etapa se fixam. Ao realizar novas "formações lineares" de 8 com duas reglinhas ou as mutilações e reconstruções, a criança mostra muito mais destreza, faz menos tentativas, comete menos erros, consegue encontrar com maior facilidade a reglinha ou o número que corresponde. Ao ler suas formações, a criança começa a dizer "e" em lugar de "com", 5 "e" 3 em lugar de 5 "com" 3.

Terceira etapa

A criança, agindo com ambas as mãos, toma agora sem precisar de fazer qualquer "tentativa" as reglinhas correspondentes. Neste momento é que deve ser introduzida a expressão "mais" na leitura e o sinal + na escrita. O sinal =, que é uma questão de escrita, se introduz com facilidade.

Assim como descrevemos a aprendizagem realizada em tôrno do número oito[3], guiar-se-á a aprendizagem do número dez, do nove, do sete, etc., sempre mediante o emprêgo de duas reglinhas. O professor observará prontamente qual o ritmo em que poderá avançar.

---

3 Poder-se-ia ter começado do mesmo modo pelo número 10, como faz o próprio Cuisenaire como exemplo.

Depois de ter ensinado vários números, 7, 8, 9, 10 e de ter introduzido os sinais + e =, o que sabemos se consegue com facilidade, o professor deverá realizar um exercício de aplicação da cálculos abstratos, sem a ajuda das regüinhas[4].

Cuisenaire confeccionou um "Livret de fiches de calcul" (Caderneta de fichas de cálculo) no qual propõe, de modo gradual, os diversos exercícios do cálculo. O emprêgo desta caderneta favorece a individualização. Recomendamos a todos os professôres que confeccionem por sua conta exercícios nos quais apresentem de forma gradual as dificuldades que devem ser vencdias pela criança. A experiência demonstrará se a gradação das dificuldades foi bem realizada ou se possui defeitos.

Resulta bastante claro indicar o tipo de exercício a realizar. Vejamos alguns exemplos.

6 + 2 =	? + 1 = 8	7 + ? = 9	? + ?= 10
4 + 4 =	? + 5 = 9	6 + ? = 8	? + ?= 7
5 + 3 =	? + 4 = 7	4 + ? = 10	? + ?= 8
8 + 2 =	....	....	....
7 + 2 =			
3 + 4 =			

O conhecimento da subtração, que deverá se iniciar neste momento, ver-se-á facilitado pelos exercícios de leitura dos "teclados" realizados ao estudar cada número, e pelos exercícios de mutilação.

Gattegno introduz do seguinte modo:

"Escrevamos 3 - 1, diz-se à criança, quando temos uma regüinha verde-clara com um dos extremos coberto por uma regüinha branca."

"Qual é a regüinha que pode ocultar ou cobrir a outra parte?"

3 - 1 = 2

"Se tomamos uma regüinha verde-clara e colocamos ao lado dela, quer seja à direita quer à esquerda, uma regüinha vermelha que

4 Muitas de nossas observações são produtos de uma experiência pessoal de vários anos. Atualmente, após haver iniciado o professor no uso do método, dirigimos o ensaio de aplicação, que a título experimental se realiza nas escolas públicas "Monsenhor Granadillo" e "Simón Rodríguez" da cidade de Maracaibo, Venezuela. Extraímos desta experiência valiosas conclusões, que oferecemos, lògicamente, sem nos referir em cada caso à sua fonte.

tape — oculte ou cubra — uma parte da verde-clara, que quantidade se deixou descoberta?"

$$3 - 2 = 1$$
$$1 = 3 - 2$$

Cuisenaire sugere que se convide a criança a apanhar,por exemplo, tôdas as regüinhas maiores do que a regüinha 2, e a que expresse quanto maior que a regüinha 2 é cada uma delas. Se a criança toma a regüinha 9, verificará, colocando sôbre ela a regüinha 2, que "é 7" maior. Colocará em prosseguimento à regüinha 2 e sôbre a regüinha 9 a regüinha 7 para verificar seu acêrto.

Os cálculos abstratos "exigirão" a introdução do sinal (-). Através de várias lições poder-se-á introduzir -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9.

Uma série de exercícios abstratos permitirá verificar os resultados.

10 - 5	8 + 2	5 - ? = 3	? + 3 = 7	4 ? 5 = 9
8 - 4	6 - 3	6 - ? = 2	? - 5 = 2	8 ? 3 = 5
		? ? ? = 7		
		? ? ? = 8		

Para introduzir o símbolo x (multiplicação) pede-se ao aluno que procure duas regüinhas iguais que juntas tenham o valor das outras regüinhas restantes ou, o que é o mesmo, que divida cada uma dessas regüinhas em duas partes iguais. Necessitará duas amarelas para formar a laranja, duas verde-claras para formar a verde-escura, etc.

Dever-se-á perguntar-lhe: "Quantas vêzes 5 se precisa para formar 10; e quantas vêzes quatro para formar 8?"

2 x 2, que se deve ler "duas vêzes dois", para formar quatro.

Os exercícios abstratos seguirão às realizações concretas:

4 x 2	. x 2 = 8	? x ? = 6
5 x 2	. x 2 = 6	4 ? 2 = 8
3 x 2	. x 2 = 4	

É recomendável, depois de cada nova aprendizagem, insistir nas aquisições anteriores (+, -, x, etc.).

A esta altura da aprendizagem se introduzem a divisão e a fração.

Pode-se perguntar à criança:

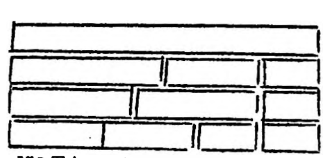
— Quantas regüinhas vermelhas são necessárias para formar a regüinha lilás?
— Quantas vêzes se tem de colocar a regüinha vermelha para formar a regüinha lilás?
— Que regüinha é a metade da lilás?
— Qual é a metade de quatro?
— Que é o número dois do número quatro?
Em seguida podemos escrever:
$2 = 1/2 \times 4$, que se deve ler "dois é a metade de 4".
— A regüinha vermelha é a metade da lilás: mostre a outra metade.
— Indique as duas metades ou dois meios da regüinha vermelha.

Poder-se-á propor à criança exercícios iguais aos que seguem:

8 : 2 =	4 : ? = 2	1/2 de 10 = ou melhor 1/2 x 10=
10: 2 =	? : 2 = 5	1/2 de 4 = ou melhor 1/2 x 4=
2 : 2 =		1/2 de 8 = ou melhor 1/2 x 8 =

b) Cálculos com mais de duas regüinhas.

Até êste momento a criança só utilizou duas regüinhas, tanto para os seus quadros de decomposição, mutilação, etc., e números inferiores a 10. Deve agora empregar mais de duas regüinhas. Construamos a tábua de decomposição do número 10 com mais de duas regüinhas.



NOTA: Quadro incompleto

Poder-se-á seguir os mesmos passos que ao se trabalhar com apenas duas regüinhas, mas lògicamente de forma abreviada.

a) Leitura das formações.
b) Escrita das formações.

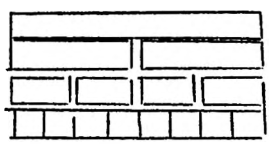
As mutilações e reconstituições já não são, conforme Cuisenaire, necessárias.

Realizar-se-ão cálculos abstratos dos seguinte tipo:

(5 + 3) + 2 =
(4 + 4) + 2 =
(3 + 3) + (2 + 2) =
(1 + 7) + 2 =

Com mais de duas regüinhas iguais.

Poderão ser estudados os produtos, 10, 9, 8, 6, 4. Exemplo de formação linear do número 8.



Leitura das formações.

8 e 2 vêzes 4, 4 vêzes 2, 8 vêzes 1.

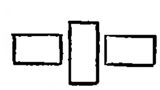
Cópia das formações.

8
2 x 4 =
4 x 2 =
8 x 1 =

Produtos.

Como já vimos ao trabalhar apenas com duas regüinhas, a multiplicação se introduz pedindo à criança que indique, v. gr., de quantas regüinhas quatro se necessita para formar oito.

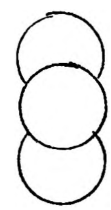
Será uma convenção, desde agora, que duas regüinhas materialmente superpostas significam um produto. Oito será simbolizado ao colocar-se a regüinha dois sôbre a regüinha 4 (ou de modo inverso)



F Faremos com que a criança observe que, colocando a regüinha 2 (número de vêzes) transversalmente sôbre uma regüinha 4, indicamos 2 vêzes 4.

Ao comparar e notar a igualdade dos retângulos formados pelas duas regüinhas 4 e as quatro regüinhas 2, comprovará que $4 \times 2 = 2 \times 4 = 8$.

No "jôgo de cartas dos produtos" a criança deverá encontrar a carta que, mediante ambas as côres (lilás e vermelho) em tôrno do círculo branco, sintetize o produto 8.



A criança associará fàcilmente o "naipe" ou "carta" com a materialização do produto mediante as regüinhas superpostas e determinará no "quadro mural de síntese dos produtos" (ver Cap. III, pág. 66) a "representação" da operação (primeira linha - segunda casinha).

Indicado o produto no quadro mural, fixar-se-á, mediante um alfinête, o número (8) (produto estudado) sôbre o círculo central.

Êstes exercícios implicam no comêço da mecanização (ver pág. 121). O emprêgo dos "naipes", do "quadro mural", etc., assegura a mecanização da operação. A aprendizagem dos produtos é resultado dos descobrimentos da criança, da sua atividade relacionante e não de um hábito estereotipado. O método evita o ensino das tábuas. A criança realiza suas próprias tábuas.

O avanço em direção à abstração, diz Gattegno, "se produz desde a construção visível e tangível dos trens de regüinhas, e em seguida dos retângulos, até a cruz simbólica e até um sinal a que se deu um significado imediato, mas que está relacionado com a situação concreta de onde partiu a criança"[5].

5 GATTEGNO, C. Introducción a los números en color. Libro del maestro. Ed. Cuisenaire, de Espanha, Madri, 1961.

Os cálculos abstratos seguintes — estudados os números 6, 8, 9, 10 — poderão fàcilmente ser realizados pela criança*:

$(3 \times 3) + 1 =$
$(2 \times 2) - 3 =$
$(5 \times 2) - (3 \times 2) =$
$(4 \times 2) - (9 : 3) =$
$(3 \times 3) : 3 =$
$(4 \times 2) : 4 =$

$8 - (3 \times 2) =$
$(2 \times 2) + (3 \times 2) =$
$(10 : 2) - (4 : 2) =$
$(8 : 2) \times 2 =$
$(8 : 4) \times 2 =$

Na medida em que seja imprescindível, poderá se auxiliar mediante a materialização da operação com as regüinhas, mas sempre inclinando-se no sentido de desprender-se dêsse apoio para conseguir a pura realização abstrata.

NOTA: Antes de continuar expondo as "etapas" seguintes da aplicação do método, achamos ser de interêsse insistir em algumas idéias sôbre a forma em que se deve guiar a aprendizagem das frações.

x • x • x • x • x

---

* Ver na página 125 dêste capítulo, tratado de forma especial, o ensino da DIVISÃO.