MOBRAL
GEPED

PARA
O PROFESSOR
DE EDUCAÇÃO
INTEGRADA

GUIA DE MATEMÁTICA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
MOVIMENTO BRASILEIRO DE ALFABETIZAÇÃO

Presidente da República
Emílio Garrastazu Médici

Ministro da Educação e Cultura
Jarbas Passarinho

Presidente do MOBRAL
Mário Henrique Simonsen

Secretário Executivo
Arlindo Lopes Corrêa

Secretária Executiva Adjunta
Maria Teresinha Tourinho Saraiva

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
MOVIMENTO BRASILEIRO DE ALFABETIZAÇÃO
GERÊNCIA PEDAGÓGICA

GUIA DE MATEMÁTICA

PARA O PROFESSOR DE EDUCAÇÃO INTEGRADA

HELOÍSA MEIRA COELHO MELHADO
MARIA LEONOR DE MACEDO SOARES
TERESA CRISTINA DE ARAÚJO CALDAS
VILMA PEREIRA GALVÃO

GERÊNCIA PEDAGÓGICA — GEPED
ANDRÉA MANDIM

RIO DE JANEIRO — BRASIL
MAIO 1973

P Brazil BR
Mobral
Integrated Curriculum M
Mathematics D

O MOBRAL é geralmente conhecido pelo seu fabuloso sucesso quantitativo, e isso não é de estranhar, pois entre 1970 e 1972 as matrículas em alfabetização cresceram à razão de 190% ao ano, taxa realmente inédita na história da educação mundial, considerando-se as cifras absolutas em jogo. Todavia, a administração do MOBRAL não limita suas preocupações às estatísticas de mobilização e atendimento, considerando como importantíssimas, para o real sucesso do Movimento, aquelas variáveis que dão indicações acerca da qualidade do processo educacional. O MOBRAL realiza por isso, cotidianamente, um grande esforço no campo pedagógico, visando elevar seus índices de rendimento e eficiência.

Os trabalhos concernentes à qualidade refletem-se na preocupação constante de treinamento e assistência técnica aos nossos professores e alfabetizadores: a assistência técnica, através do sistema de supervisão global, cobrindo todo o País, e o treinamento, por meio de inúmeros cursos, usando tecnologias avançadas ou tradicionais, que já alcançaram a quase 200.000 pessoas.

O treinamento do MOBRAL, cada vez mais, recebe prioridade e suporte de precioso material de apoio, como este elaborado por equipe especializada, sob a chefia da nossa Gerente Pedagógica, Professora Andréa Mandim. Através de publicações como esta, o MOBRAL coloca o seu know-how à disposição de todos aqueles que, no Brasil, têm a responsabilidade de desenvolver o setor que mais influência exerce sobre o processo de desenvolvimento: a educação.

(as.) Arlindo Lopes Corrêa

AO PROFESSOR

Este guia foi feito pensando em você, no seu trabalho em classe, nos seus propósitos de levar os alunos à reflexão, à análise, à descoberta e a generalizações.

Sabemos quanto é importante que você e seus alunos compreendam os conceitos matemáticos e os utilizem objetivamente, abandonando processos mecânicos, decorados, divorciados do raciocínio lógico matemático.

Esta compreensão é facilitada através de uma abordagem inovadora dos assuntos, tornando os conceitos claros e racionais.

Ao apresentarmos o conteúdo mínimo, partimos da Teoria dos Conjuntos, cujas noções são aplicadas direta ou indiretamente em cada um dos tópicos seguintes.

Este foi o enfoque que demos no Guia de Matemática, procurando usar linguagem simples e muitos exemplos para que a nossa mensagem pudesse ser entendida por todos.

Neste **guia** você encontrará **o que** ensinar e **como** ensinar.

As sugestões nele contidas pretendem servir como orientação ao seu planejamento.

O conteúdo necessário aos alunos do Curso de Educação Integrada está disposto em sete unidades, que procuramos desenvolver de forma dinâmica e renovadora, a fim de que os conhecimentos, anteriormente adquiridos nesta matéria, fossem reorganizados, relacionados e atualizados.

HELOÍSA MEIRA COELHO MELHADO
MARIA LEONOR DE MACEDO SOARES
TERESA CRISTINA DE ARAÚJO CALDAS
VILMA PEREIRA GALVÃO

DA EQUIPE DE MATEMÁTICA DA GEPED

SUMÁRIO

Operação com conjunto dos divisores
Maximação
- através da interseção dos conjuntos de divisores.

Resultado: m.d.c.

Operação com conjunto dos múltiplos
Minimação
- através da interseção dos conjuntos de múltiplos

Resultado: m.m.c.

Número racional absoluto
Números fracionários e naturais: frações

Identificação de números naturais com racionais absolutos
Frações aparentes
Subconjuntos
- Conjunto dos naturais

Estudo de frações

Nomes dos termos e leitura
Fração ordinária e decimal
Fração própria e imprópria
Forma mista da fração imprópria
Frações equivalentes
Simplificação de frações
Frações homogêneas

Estrutura de ordem
Igualdade e desigualdade
Redução de frações ao mesmo denominador
Reta numerada

Operações
Adição
- técnicas operatórias

Subtração
- operação inversa da adição
- técnicas operatórias

Multiplicação
- técnicas operatórias

Divisão
- operação inversa da multiplicação
- técnicas operatórias

Representação Decimal
Nova representação dos números racionais absolutos
Operações (por etapas)
- adição
- subtração
- multiplicação
- divisão

Porcentagem
Conceito
Técnicas de cálculo

UNIDADE VI — MEDIDAS ______ 212

Introdução

Correspondência entre uma grandeza e outra da mesma espécie
As medidas regionalistas: cuia, pires, xícara, pé, dedo, palmo
Necessidade de uma medida-padrão
- representação da medida — numerais
- conjunto de medidas-padrão
- instituição nacional encarregada de execução, supervisão, orientação e fiscalização da utilização do Sistema de Unidades (INPM)

Medidas de comprimento

Metro: múltiplos e submúltiplos
- relação decimal entre as medidas de comprimento
- representação, leitura e escrita

Aspecto prático da medida de comprimento
- instrumento para medir comprimento

Operações envolvendo medida de comprimento

Medidas de superfície

Metro quadrado: múltiplos e submúltiplos
- relação centesimal entre as medidas de superfície
- representação, leitura e escrita

Aspecto prático da medida de superfície
Medidas agrárias — ha
- relação entre ha e hm^2

Operações envolvendo medidas de superfície

Medidas de volume

Metro cúbico: múltiplos e submúltiplos
- relação milesimal entre medidas de volume
- representação, leitura e escrita

Litro: múltiplos e submúltiplos
- relação do litro e decímetro cúbico
- relação decimal
- representação, leitura e escrita

Aspecto prático da medida de volume
Operações envolvendo medidas de volume

Medidas de massa

kg — unidade fundamental
Grama: múltiplos e submúltiplos
- relação decimal entre as medidas de massa
- representação, leitura e escrita

Outras medidas de massa: tonelada, arroba e quilate
Aspecto prático da medida de massa
Operações envolvendo medidas de massa

Medidas de tempo

Hora, minuto e segundo
- relação sexagesimal entre as medidas de tempo
- representação e leitura

Outras formas de medir o tempo:
- dia, semana, mês, ano, século
- instrumentos de medir: relógio, ampulheta
- leitura de calendário

UNIDADE 1

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

OBJETIVOS:

1. Reconhecer conjuntos e suas relações; efetuar operações empregando corretamente suas propriedades.
2. Empregar a simbologia correta e terminologia precisa dentro do estudo da Matemática.
3. Relacionar o produto cartesiano entre conjuntos, com a combinação de elementos aos pares.

DESENVOLVIMENTO

NOÇÃO DE CONJUNTO E ELEMENTO

A palavra conjunto sugere, imediatamente, a noção de coleção, grupo, no sentido usado na linguagem comum.
De um modo geral, é esta a significação matemática da palavra, apenas a Matemática usa a palavra conjunto para qualquer tipo de coleção.

Assim sendo, podemos ter:

conjunto de objetos
conjunto de idéias
conjunto de seres etc.

O professor utilizará o próprio ambiente de classe, a natureza, para levar seus alunos à compreensão do conceito de conjunto, partindo sempre das experiências concretas. O professor deve levar os alunos, aos poucos, a se desprenderem do material concreto e a chegar aos conceitos e generalizações (abstração).

Exemplo: que espécie de conjuntos o aluno pode perceber em sua casa ou no trabalho, na sala de aula, na rua onde mora, etc.?

Possivelmente aparecerão respostas como estas:

— conjunto de pessoas;
— conjunto de camas;
— conjunto de cadeiras;
— conjunto de aves;
— conjunto de janelas, etc.

O que nós encontraríamos nesses conjuntos?

— a professora, no conjunto de pessoas;

— a janela da sala, no conjunto de janelas.

Cada um dos objetos, membros que constituem um conjunto, é chamado **elemento** do conjunto.

Assim, as pessoas, camas, cadeiras, aves, janelas são os **elementos** dos conjuntos citados. Os elementos de um conjunto têm sempre alguma coisa em comum, uma qualidade especial que os torna distintos e inconfundíveis.

Um conjunto é **bem definido** quando podemos dizer, com precisão, se um determinado elemento pertence ou não a este conjunto.

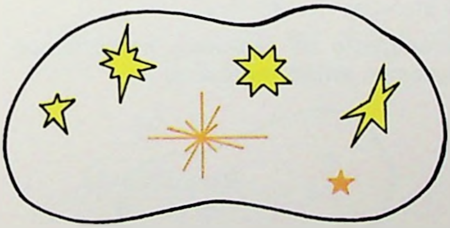
Por exemplo:

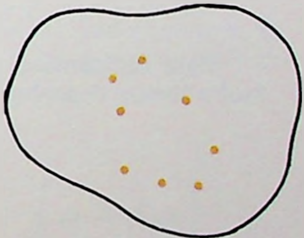
- conjunto bem definido: conjunto de pessoas — Pessoas são seres vivos que têm características próprias, o que as torna diferentes e inconfundíveis com outros seres vivos. Então, este seria um conjunto bem definido.
- conjunto não definido: conjunto das cinco moças mais bonitas da cidade. Cada rapaz que se encontra, na sala de aula, escolheria cinco moças, por ele consideradas as mais bonitas, segundo os seus padrões. Neste caso, não poderíamos afirmar que uma determinada moça seja ou não elemento do conjunto mencionado.

Para uma melhor visualização da idéia de conjuntos, algumas vezes usaremos figuras para representá-los. Nesse caso utilizaremos contornos fechados e, caso seja conveniente, representaremos seus elementos por pontos em seu interior.

Por exemplo:

Conjunto de estrelas





Ao representarmos elementos que não fazem parte do conjunto, podemos assinalá-los por pontos exteriores.

Por exemplo:

maçã não é elemento do conjunto de flores do jardim da praça.

Para indicar que estamos nos referindo a um conjunto, usaremos um símbolo especial: as chaves $\{\ \}$. Encerrando a descrição de um conjunto em chaves, estaremos economizando a expressão "o conjunto formado por" ou ainda "o conjunto cujos elementos são".

Exemplo:

$\{b, o, l, a\}$ lê-se: o conjunto formado pelas letras da palavra bola.

Podemos apresentar um conjunto:

Por propriedade: uma propriedade (qualidade especial que torna inconfundível pessoa ou objeto) que caracterize os elementos do conjunto.

Exemplo: conjunto das vogais $\{\text{vogais}\}$

— a propriedade característica dos elementos do conjunto é "ser vogal".

Por enumeração: relacionar, entre chaves, todos os elementos, separados por vírgula.

Exemplo: $\{a, e, i, o, u\}$

Podemos colocar em qualquer ordem os elementos enumerados dentro das chaves. O conjunto das vogais continua o mesmo se mudarmos a ordem de seus elementos: $\{e, u, i, o, a\}$

Na enumeração dos elementos de um conjunto, cada elemento deve ser escrito uma só vez, isto é, não deve ser repetido.

Freqüentemente necessitaremos nos referir a conjuntos e elementos. Esta referência será feita por meio de letras:

— maiúsculas, para conjuntos.

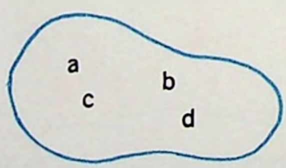
— minúsculas, para elementos.

Se tivéssemos necessidade de nos referir várias vezes ao conjunto de vogais do alfabeto, por exemplo, poderíamos dizer, no princípio, que tal conjunto seria representado pela letra A. Deste modo, evitaríamos repetir a expressão "conjunto de vogais do alfabeto".

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Para indicarmos, por exemplo, um conjunto de cadeiras, perderíamos muito tempo desenhando cadeiras, poderíamos então representar:

$\{a, b, c, d,\}$ ou ainda



Neste caso, as letras minúsculas a, b, c, d representam cadeiras, que são os elementos do conjunto.

Conjunto universo $\mathcal{U}$

Com o decorrer do nosso estudo, sentiremos a necessidade de determinar um conjunto mais amplo, ao qual pertençam todos os elementos com os quais estamos trabalhando.

Por exemplo: Quando trabalhamos com o conjunto das vogais, o conjunto ao qual pertencem todas as vogais é o conjunto das letras do alfabeto. O conjunto das letras do alfabeto é denominado: **Conjunto Universo** e representado por $\mathcal{U}$.

Quando estamos trabalhando, por exemplo, com conjunto de aves, conjunto de animais de estimação da casa do José ou conjunto de animais selvagens, o nosso conjunto universo é o conjunto dos animais, pois ele possui todos os elementos dos conjuntos relacionados.

É de grande importância determinar o conjunto universo, e o aluno deve perceber que nós o podemos escolher de forma a atender às nossas necessidades.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Se um objeto a é elemento de um certo conjunto A, dizemos também que tal objeto pertence a A, e escrevemos, simbolicamente:

$a \in A$

Por exemplo:

Chamemos A ao conjunto de letras da palavra MOBRAL

$A = \{m, o, b, r, a, l\}$

m é elemento do conjunto A.

Logo, podemos escrever, simbolicamente:

$m \in \{m, o, b, r, a, l\}$

ou

$m \in A$

lê-se: m pertence ao conjunto de letras da palavra MOBRAL ou **m pertence a A.**

Por outro lado, se um objeto **c** não é elemento de um certo conjunto B, dizemos, então, que tal objeto não pertence a B e escrevemos simbolicamente

$c \notin B$

Por exemplo:

$A = \{m, o, b, r, a, l\}$

j não é elemento do conjunto A.

Logo,

$j \notin \{m, o, b, r, a, l\}$

ou

$j \notin A$

lê-se: j **não pertence** ao conjunto de letras da palavra MOBRAL

ou

j **não pertence** a A

É preciso atentar que os símbolos $\in$ (pertence a)e $\notin$ (não pertence a) são empregados para relacionar **elemento a conjunto.**

Esta noção deve servir de discussão entre os alunos. Lembramos que o professor não fará uma aula expositiva sobre o assunto, mas, sim, lançará perguntas e utilizará material que possa ser usado ou visualizado pelos alunos, para que estes possam refletir, analisar e concluir.

. Outro exemplo:

Chamemos de A o conjunto de consoantes do alfabeto.

$$A = \{b, c, d, f, g, h, j, l, m, n, p, q, r, s, t, v, x, z\}$$

As sentenças

$b \in A$
$a \notin A$
$j \in A$
$i \notin A$ são sentenças verdadeiras.

e as sentenças

$f \notin A$
$u \in A$
$p \notin A$ são sentenças falsas por não exprimirem a verdade, isto é, **f** e **p** são consoantes, portanto pertencem ao conjunto A mencionado e a letra **u** não é consoante, portanto não pertence ao conjunto A.

É preciso observar que:

$\in$ (pertence a) $\notin$ (não pertence a)

são usados na relação de pertinência, que é uma relação entre **elemento** e **conjunto.**

CONJUNTOS ESPECIAIS

Na linguagem comum a noção de conjunto está associada à noção de pluralidade. Em Matemática, entretanto, o seu significado é mais amplo, pois consideramos conjunto com muitos elementos, conjuntos com poucos elementos, conjuntos com um só elemento e conjunto sem elementos.

Conjunto unitário

Vamos considerar como nosso conjunto universo as pessoas existentes na nossa sala de aula. Poderemos pensar, dentro do nosso Universo, em vários conjuntos:

— dos alunos com menos de trinta anos
— dos alunos do sexo feminino
— dos professores de nossa classe

Quantos professores existem na nossa classe? **Um.** Então esse professor é o **único elemento** do conjunto de professores da nossa classe.

Quando o conjunto só tem um elemento é chamado **conjunto unitário.** O professor é o único elemento que pertence a este conjunto, que chamaremos M.

$M = \{\text{professor da turma}\}$ então M é um conjunto unitário.

Vejamos agora o conjunto de dias da semana começados pela letra **d,** que chamaremos de I.

$$I = \{\text{domingo}\}$$

O conjunto I é **unitário** pois só tem um elemento. Os outros dias da semana, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado não começam com a letra **d.**

Qual será o conjunto universo do conjunto proposto? — Conjunto dos dias da semana.

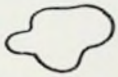
Porém, dentro desse conjunto universo, quantos elementos podemos colocar no conjunto de dias, começados com a letra **d?** Apenas um **elemento.**

Conjunto vazio

Agora pensem nos dias da semana começados por **j.** Existe algum? Não. Neste caso o conjunto proposto D é um conjunto sem elementos. Um conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio.**

O conjunto vazio pode ser **simbolizado** das seguintes maneiras:

$D = \varnothing$ ou $D = \{\ \}$

A figura  **representa** o conjunto vazio.

Percebemos que em seu interior não foi assinalado nenhum ponto.

Observação: Só podemos conceber um único conjunto vazio: pouco importa saber se ele é vazio de pessoas, de números, de animais ou de quaisquer outros elementos. Logo, **o conjunto vazio é único.**

Conjuntos finitos e infinitos

Observemos que os conjuntos das letras do alfabeto, o dos animais existentes na casa do aluno ou de pessoas da nossa classe, possuem um número certo de elementos. Se começarmos a contar os elementos de cada um desses conjuntos, o processo de contagem chegará a um final.

Intuitivamente, os conjuntos mencionados são chamados de **conjuntos finitos.**

Pense, agora, no conjunto de números maiores do que 10.

É fácil concluir que, se começarmos a dizer todos os números maiores que 10, nunca terminaremos, pois sempre conseguiremos dizer um maior. Logo, se quisermos contar seus elementos, o processo de contagem não chegará a um final. Dizemos então que o conjunto é **infinito.**

Se quisermos representar, por escrito, um conjunto infinito, poderemos utilizar um símbolo: reticências (. . .). Exemplo:

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$ conjunto infinito dos números maiores que 9.

Ao representarmos um conjunto finito com muitos elementos, podemos usar uma série de pontos colocando, depois dos pontos, os últimos elementos do conjunto. Exemplos:

$B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18, 19, 20\}$ é o conjunto de todos os números de 1 até 20.

$C = \{a, b, c, \ldots, v, x, z\}$ é o conjunto finito das letras do nosso alfabeto.

SUBCONJUNTOS — RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Retornemos aos primeiros exemplos de conjuntos citados neste trabalho, como possíveis sugestões apresentadas pelos alunos:

$U = \{$ móveis da sala de aula $\}$

conjunto universo que nos servirá de referência.

Dentro desse conjunto podemos separar outros conjuntos, tais como:

$B = \{$ carteiras da sala de aula $\}$
$C = \{$ bancos e cadeiras da sala de aula $\}$
$D = \{$ cadeiras do professor $\}$
$E = \{$ estantes de tijolos $\}$
$F = \{$ armários da sala de aula $\}$
$G = \{$ armários do professor $\}$
$H = \{$ mesas do professor $\}$

Notamos que:

O conjunto G é uma "parte" do conjunto F, pois todos os elementos de G pertencem a F.

O conjunto D é uma "parte" do conjunto C, pois todos os elementos de D pertencem a C.

Nesse caso, diz-se que:

G é subconjunto de F
D é subconjunto de C

Ou ainda:

G está contido no conjunto F — simbolicamente: $G \subset F$

D está contido no conjunto C — simbolicamente: $D \subset C$

Por sua vez, se $G \subset F$, então, dizemos também que o conjunto F contém o conjunto G — simbolicamente: $F \supset G$

Outros exemplos:

—► Seja:

A — conjunto de letras da palavra Educativo

B — conjunto das vogais

Então:

$$A = \{e, d, u, c, a, t, i, v, o\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Note que todo elemento de B é também elemento de A

B é um subconjunto de A

ou ainda,

B **está contido** em A ou A **contém** B

$B \subset A$ $\qquad$ $A \supset B$

→ Seja:

B = $\{a, e, i, o, u\}$ conjunto das vogais

C = $\{r, i, o, g, r, a, n, d, e\}$ conjunto das letras do nome Rio Grande

a $\in$ C
e $\in$ C
i $\in$ C
o $\in$ C
u $\notin$ C

Há um elemento de B que não pertence a C.
Dizemos, então, que:

B **não é subconjunto** de C.

Podemos afirmar que as sentenças matemáticas, abaixo, são verdadeiras:

B $\not\subset$ C (conjunto B não está contido em C)

C $\not\supset$ B (conjunto C não contém B)

É preciso observar que os sinais

$\subset$ (está contido) $\supset$ (contém)

$\not\subset$ (não está contido) $\not\supset$ (não contém)

são usados na relação de inclusão, que é uma **relação entre conjuntos.**

→ Consideremos:

B = $\{a, e, i, o, u\}$ conjunto das vogais

D = $\{e, s, t, a, d, o\}$ conjunto de letras da palavra Estado.

Repare que **nem todo** elemento de B pertence também a D

i $\in$ B e i $\notin$ D

u $\in$ B e u $\notin$ D

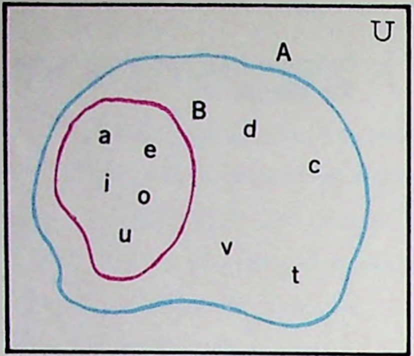
Dizemos, então, que
B não é subconjunto de D
Podemos afirmar que as sentenças matemáticas, abaixo, são verdadeiras:

B $\not\subset$ D (conjunto B não está contido em D)

D $\not\supset$ B (conjunto D não contém B)

Uma visualização maior pode ser dada, usando-se "Diagrama de Venn". Nestes diagramas (representação por meio de figura), que foram construídos pelo matemático Venn, representamos o conjunto universo por um retângulo, e os conjuntos em debate por contornos fechados.

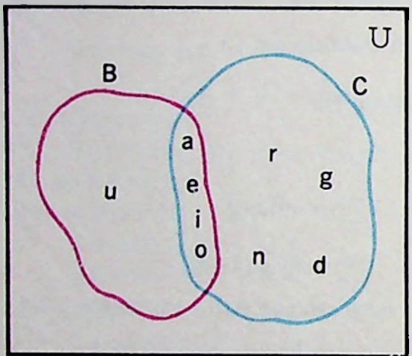
Exemplos dados.



$B \subset A$ (lê-se B está contido em A)

ou

$A \supset B$ (lê-se A contém B)



$B \not\subset C$ (lê-se B não está contido em C)

$C \not\supset B$ (lê-se C não contém B).

ATENÇAO

O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

De fato,

$A = \{\ \}$ $\qquad$ $A \subset B$ ou $\emptyset \subset B$

$B = \{1, 2, 3\}$

Note que:

— não há no conjunto vazio A nenhum elemento que não pertença a B

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Imaginemos dois conjuntos:

$F = \{a, e, i, o, u\}$

$G = \{\text{vogais do nosso alfabeto}\}$

Verificamos que todo elemento de F é elemento de G.

$a \in G$; $e \in G$; $i \in G$; $o \in G$; $u \in G$.

Logo F é subconjunto de G, ou seja, $F \subset G$.

Todo elemento de G é elemento de F.

$a \in F$; $e \in F$; $i \in F$; $o \in F$; $u \in F$.

Logo G é subconjunto de F, ou seja, $G \subset F$.

Podemos afirmar que F é igual a G.

Simbolicamente, $F = G$.

Concluímos que:

Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F = G$

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.

Vejamos outros exemplos:

H = {Maranhão, Piauí, Ceará, Rio G. do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Bahia}

I = {Estados da Região Nordeste}

$H \subset I$ e $I \subset H$ Logo $H = I$

O conjunto das vogais da palavra Brasil é igual ao conjunto das vogais da palavra Maria, porque todas as vogais da palavra Brasil são vogais da palavra Maria e todas as vogais da palavra Maria são vogais da palavra Brasil.

$$\{a, i\} = \{a, i\}$$

A negação de $A = B$ é indicada por $A \neq B$ (o sinal $\neq$ lê-se: diferente de) e os conjuntos são denominados desiguais ou diferentes.

Exemplos:

$$\{a, b, c, d\} \neq \{1, a, 2, b\}$$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

De um modo geral, chamamos de operação toda ação que é realizada a partir de dois elementos obedecendo a processos ou métodos determinados (lei) e produzindo um outro elemento (resultado).

Vestir o uniforme é a lei.

O corpo da pessoa e o uniforme são os elementos.

O uniforme vestido é o resultado.

Abrir o livro, calçar a meia, falar, são exemplos de **operação.**

Muitas operações podem ser realizadas em dois sentidos, isto é, podem ser feitas e desfeitas

Exemplos:

Vestir o uniforme — operação inversa: despir o uniforme

Abrir o livro — operação inversa: fechar o livro

Outras, no entanto, não podem ser desfeitas, isto é, não existem as suas inversas.

Exemplo:

ler — não tem operação inversa.

Veremos, agora, as operações com conjuntos, isto é, a partir de dois ou mais conjuntos, formar um novo conjunto.

União

Exemplo 1: Sejam, por exemplo, os conjuntos:

$A = \{l, a, r\}$ conjunto de letras da palavra LAR

$B = \{j, o, g, a, r\}$ conjunto de letras da palavra JOGAR

Formemos um novo conjunto com todos os elementos dos conjuntos dados. (atenção: não devem aparecer elementos repetidos)

$$\{l, a, r, j, o, g\}$$

O conjunto obtido é o resultado da operação **união** com os conjuntos A e B citados.

Assim, usando o símbolo de união $\cup$ temos:

$$A \cup B = \{l, a, r, j, o, g\}$$

$A \cup B$ lê-se: A união B

A reunião de vários conjuntos é realizada de modo análogo.

Exemplo 2: Uma turma tem 8 alunos.

Sejam 3 conjuntos formados por esses alunos, fazendo um trabalho sobre recreação:

$A = \{$João, Maria, José, Rosa, Ana$\}$ responsáveis pela pesquisa

$B = \{$Jorge, Ana, Maria, Américo$\}$ responsáveis pela seleção de gravuras

$C = \{$Rosa, Ana, Américo, Rita$\}$ responsáveis pela confecção do mural

O professor resolveu reunir os três conjuntos de alunos para saber como vai indo o trabalho e então tivemos:

$$A \cup B \cup C = \{\text{João, Maria, José, Rosa, Ana, Jorge, Américo, Rita}\}$$

Exemplo 3:

Sejam os conjuntos:

A conjunto de letras da palavra pé

B conjunto de letras da palavra pedal

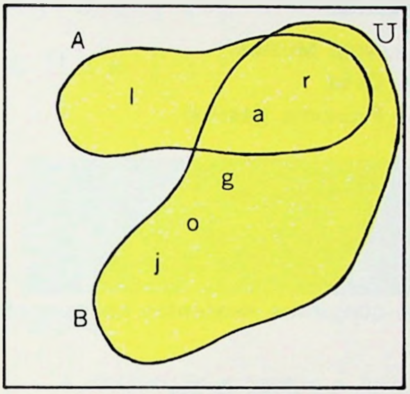
Temos:

$A = \{ p, e \}$

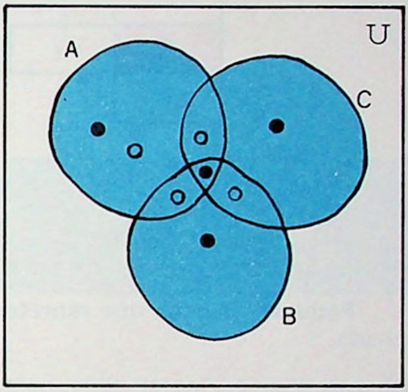
$B = \{ p, e, d, a, l \}$ Note que $A \subset B$ então

$A \cup B = \{ p, e, d, a, l \} = B$

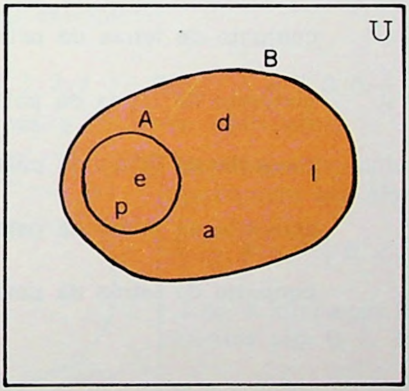
Para os exemplos acima podemos dar uma maior visualização, usando o Diagrama de Venn:



Exemplo 1



Exemplo 2



Exemplo 3

Operação união

Dados dois conjuntos A e B, chamamos de união destes dois conjuntos ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou B.

ATENÇAO

Sejam: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \emptyset$

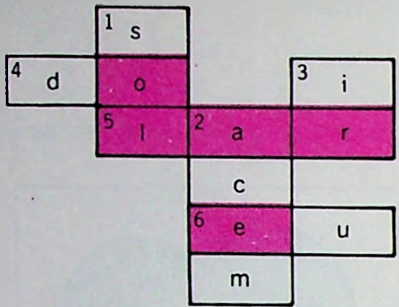
$A \cup B = \{a, b, c\} = A$

É fácil perceber que a união de qualquer conjunto com o conjunto vazio tem como resultado o próprio conjunto.

$A \cup \emptyset = A$

Interseção

O professor poderá propor ou exemplificar com um jogo de palavras cruzadas, bem simples:



Vertical

1 — Astro Rei
2 — Carne de boi, parte do lombo
3 — Mover-se de um lugar para outro

Horizontal

4 — Nota Musical
5 — Casa
6 — Pronome pessoal

Pedir aos alunos que representem os conjuntos existentes no exemplo citado:

$A = \{s, o, l\}$ conjunto de letras da palavra sol

$B = \{l, a, r\}$ conjunto de letras da palavra lar

$C = \{a, c, e, m\}$ conjunto de letras da palavra acém

$D = \{d, o\}$ conjunto de letras da palavra dó

$E = \{i, r\}$ conjunto de letras da palavra ir

$F = \{e, u\}$ conjunto de letras da palavra eu

Observem, agora, no desenho das palavras cruzadas, quais as letras que são comuns a dois ou mais conjuntos.

Veremos, então, que:

l é elemento de A e B, ou seja, $l \in A$ e $l \in B$

a é elemento de B e C, ou seja, $a \in B$ e $a \in C$

o é elemento de A e D, ou seja, $o \in A$ e $o \in D$

r é elemento de B e E, ou seja, $r \in B$ e $r \in E$

e é elemento de C e F, ou seja, $e \in C$ e $e \in F$

O professor, através de perguntas, procurará levar os alunos a concluir que as palavras se cruzam, exatamente, onde as letras são comuns a duas palavras.

Esses elementos comuns a dois ou mais conjuntos formam um outro conjunto chamado interseção.

Representa-se, por exemplo, o conjunto interseção dos conjuntos A e B por:

A $\cap$ B que se lê **A interseção B** ou **A inter B**

$\cap$ símbolo de interseção

Então, no exemplo citado:

$A \cap B = \{ i \}$ $\quad B \cap C = \{ a \}$ $\quad A \cap D = \{ o \}$

$B \cap E = \{ r \}$ $\quad C \cap F = \{ e \}$

Operação interseção:

Consideremos 2 conjuntos quaisquer A e B. Chama-se interseção de A e B ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B.

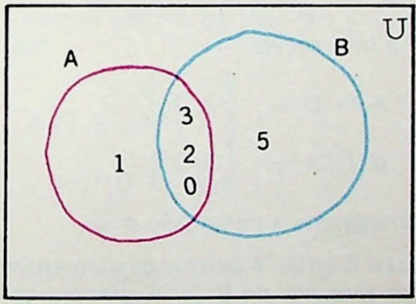
NOTA:

A conjunção **e** traduz o fato de os elementos serem comuns aos dois conjuntos.

Vejamos outros exemplos:

→ $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ $\quad B = \{ 2, 3, 0, 5, \}$

Agora formemos o conjunto interseção:



Vemos que os conjuntos A e B têm elementos comuns que são 0, 2, 3; logo:

$A \cap B = \{ 0, 2, 3 \}$

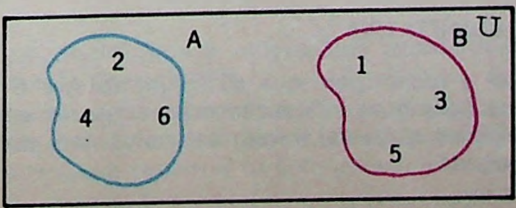
lê-se: **A** interseção **B** é o conjunto cujos elementos são: 0, 2, 3

A interseção de dois conjuntos também pode ser um conjunto vazio.

→ $A = \{ 2, 4, 6 \}$ $\quad B = \{ 1, 3, 5 \}$

Não há elementos comuns aos dois conjuntos, logo:

$A \cap B = \varnothing$ e A e B são conjuntos disjuntos.



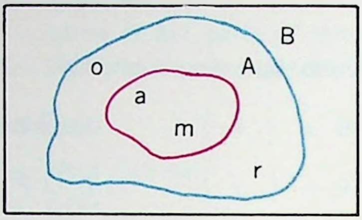
→ Seja A o conjunto de letras da palavra **má** e B o conjunto de letras da palavra **amor**.

$$A = \{m, a\} \qquad B = \{a, m, o, r\}$$

Note que: $A \subset B$, pois todo elemento de A pertence a B.

Os elementos comuns aos dois conjuntos são **a** e **m**, logo

$$A \cap B = \{a, m\} = A$$



Quando um conjunto A é subconjunto de outro conjunto B, a interseção será o próprio conjunto A.

ATENÇÃO

$$A = \{d, e, f\}$$
$$B = \varnothing$$

Vejamos qual será a interseção de A e B

$$A \cap B = \{d, e, f\} \cap \varnothing = \varnothing$$

De fato, $A \cap \varnothing = \varnothing$ pois não há elementos comuns aos dois conjuntos.

PROPRIEDADES DA UNIAO E INTERSEÇAO DE CONJUNTOS

- **Comutativa**

Observemos os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{3, 2, 4\}$$

Formemos os conjuntos união e interseção:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \qquad A \cap B = \{2, 3\}$$
$$B \cup A = \{3, 2, 4, 1\} \qquad B \cap A = \{3, 2\}$$

Analisando os conjuntos encontrados, chegamos à conclusão que:

$A \cup B = B \cup A$ — **A** união **B** é igual a **B** união **A** porque os elementos de $A \cup B$ são os mesmos de $B \cup A$, embora escritos em ordem diferente.

$A \cap B = B \cap A$ — **A** interseção **B** é igual a **B** interseção **A** porque os elementos dos conjuntos interseção são os mesmos, embora escritos em ordem diferente.

O professor chamará atenção para uma propriedade importante — denominada **comutativa** — que as operações união e interseção de conjuntos possuem:

PROPRIEDADE COMUTATIVA

É indiferente a ordem com que os conjuntos A e B são considerados, para construir os conjuntos interseção ou o conjunto união.

Muitos exercícios, debates, devem ser feitos para melhor compreensão e fixação do conceito.

- **Associativa**

O professor apresentará em seguida os conjuntos:

$A = \{a, b, c, i\}$ $B = \{a, e, i, o, u\}$ $C = \{a, f, g, i\}$

Vamos fazer a união destes conjuntos, unindo primeiramente dois conjuntos e, depois de obtido o resultado, unindo este ao terceiro conjunto. O professor mostrará que se pode fazer associações de várias maneiras.

$A \cup B = \{a, b, c, i, e, o, u\}$

$\{a, b, c, i, e, o, u\} \cup C = \{a, b, c, e, i, o, u, f, g\}$

Outra maneira:

$B \cup C = \{a, e, i, o, u, f, g\}$

$A \cup \{a, e, i, o, u, f, g\} = \{a, b, c, e, i, o, u, f, g\}$

A que conclusão chegamos?

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

NOTA: Usamos um novo símbolo ( ), chamado parênteses para indicar qual a operação que devemos fazer em primeiro lugar.

Como poderíamos chamar esta **propriedade** da união? (deixar que a classe decida, discuta para chegar ao termo **associativa.**) O professor poderá auxiliar os alunos lembrando que estamos grupando, juntando, associando conjuntos. Daí o nome **associativa.**

Vamos utilizar os mesmos conjuntos e trabalhar com a operação interseção?

$A \cap B = \{a, i\}$

$\{a, i\} \cap C = \{a, i\}$

Outra maneira:

$B \cap C = \{a, i\}$

$A \cap \{a, i\} = \{a, i\}$

A que conclusão chegamos?

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

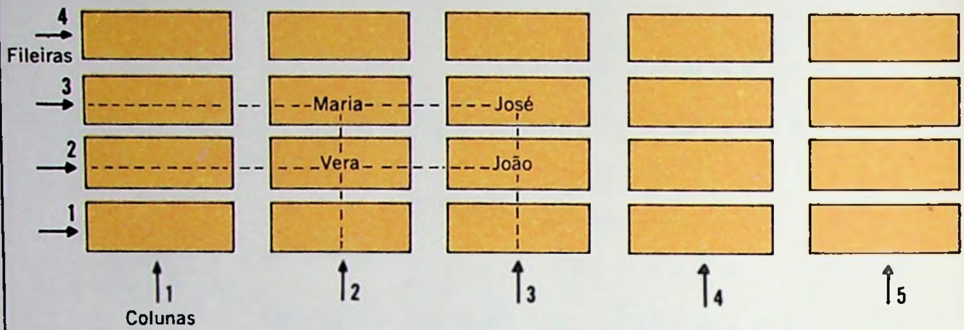
Os alunos verificam, assim, que a propriedade associativa também se aplica à operação interseção de conjuntos.

Muitos exercícios e discussões devem ser dados para melhor compreensão e fixação do conceito. Os alunos deverão ser levados a associar os conjuntos de maneiras diferentes para construir os conjuntos união e interseção.

PRODUTO CARTESIANO

Se quisermos localizar cada aluno de uma turma pelo lugar em que está sentado, num dado momento, poderemos fazê-lo separando a turma em colunas e fileiras. A posição de cada aluno poderá ser localizada por dois números, o primeiro indicando a coluna e o segundo a fileira.

Por exemplo, na figura abaixo, a carteira onde está sentado João corresponde aos números 3 e 2.



Vemos que na carteira que corresponde aos números 2 e 3 **está** sentada Maria.

A ordem em que estes elementos aparecem é importante. Podemos representar o lugar onde João está sentado por (3,2) e o de Maria por (2,3).

Esta notação (3,2) denomina-se **par ordenado**, onde 3 é o primeiro elemento e 2 é o segundo elemento.

Concluímos que: $(2,3) \neq (3,2)$, pois localizaram duas pessoas diferentes.

De um modo geral:

(a, b) é o par ordenado, cujo primeiro elemento é **a** e o segundo é **b**.

— Qual é o par ordenado que localiza José?

Ele está sentado na 3.ª coluna e na 3.ª fileira, logo, o par ordenado que o localiza é (3,3).

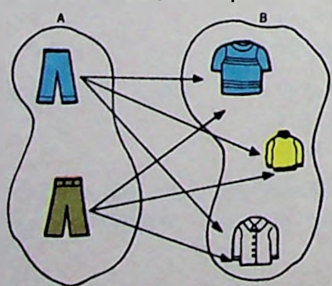
— Qual é o par ordenado que localiza Vera?

Ela está sentada na 2.ª coluna e na 2.ª fileira, logo o par ordenado que a localiza é (2,2).

ATENÇAO: Nestes dois últimos casos temos $(a,b) = (b,a)$ pois $a = b$

Agora, formando um conjunto de pares ordenados, vamos ajudar Mário:

Mário possui duas calças (rancheira e social) e três camisas (branca, amarela e azul). De quantas maneiras pode Mário vestir-se?



Temos:

A = {rancheira, social} conjunto de calças de Mário

B = {branca, amarela, azul} conjunto de camisas de Mário

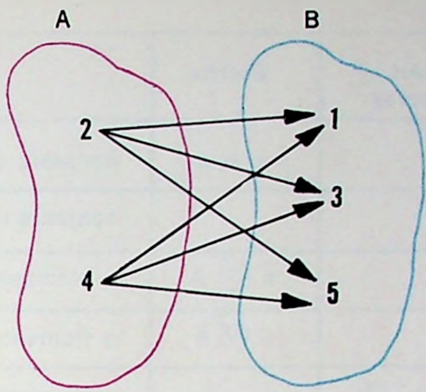
{(rancheira, branca), (rancheira, amarela), (rancheira, azul), (social, branca), (social, amarela), (social, azul)}

Como o conjunto possui seis elementos, que são **pares ordenados** representando as diversas maneiras de vestir — calça e camisa — concluímos:

— Mário pode vestir-se de seis maneiras diferentes.

Note que a partir de dois conjuntos formamos um novo conjunto.

Que operação será essa?



Sejam, por exemplo:

A = $\{2, 4\}$ um primeiro conjunto

B = $\{1, 3, 5\}$ um segundo conjunto

Vamos construir a partir de A e B um novo conjunto: seus elementos serão os pares ordenados com o primeiro elemento pertencente a A e o segundo a B:

$\{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$

Esse conjunto é indicado por A x B (lê-se: produto cartesiano de A por B) e a operação efetuada entre A e B é denominada produto cartesiano de A por B.

ATENÇÃO:

- Os elementos do conjunto produto cartesiano são pares.
- Produto cartesiano não possui a propriedade comutativa, isto é,

A x B $\neq$ B x A

Verifique:

Seja: A = $\{2, 4, 6\}$

B = $\{1, 3\}$

A x B = $\{(2,1), (4,1), (6,1), (2,3), (4,3), (6,3)\}$

B x A = $\{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$

Mas sabemos que:

(2,1) $\neq$ (1,2)

(4,1) $\neq$ (1,4) etc., pois a ordem dos elementos não é a mesma.

Logo:

A x B e B x A não possuem os mesmos elementos

Então: A x B $\neq$ B x A.

Sinais Símbolos	Escrita	Leitura
$\{\ldots, \ldots, \ldots\}$	$\{a, b, c\}$	**conjunto** dos elementos a, b, c
U		**conjunto universo**
$\in$	$a \in A$	o elemento a **pertence** ao conjunto A
$\notin$	$l \notin A$	o elemento l **não pertence** ao conjunto A
$\{\ \}$ e $\varnothing$		**conjunto vazio**
$\subset$	$A \subset B$	A **está contido** em B
$\not\subset$	$C \not\subset A$	C **não está contido** em A
$\supset$	$B \supset A$	B **contém** A
$\not\supset$	$C \not\supset A$	C **não contém** A
$=$	$A = B$	o conjunto A é **igual** ao conjunto B ou A é **igual** a B
$\neq$	$C \neq D$	o conjunto C é **diferente** do conjunto D ou C é **diferente** de D
$\cup$	$A \cup B$	A **união** B (união dos conjuntos A e B)
$\cap$	$A \cap B$	A **Interseção** B
$(\ldots, \ldots)$	(a, b)	**par ordenado** a, b
$\times$	$A \times B$	**produto cartesiano** de A por B

NOTA

— a, b, c, . . . letras minúsculas representam os elementos dos conjuntos.
— A, B, C . . . letras maiúsculas representam os conjuntos.

NOTAS PARA O PROFESSOR

O professor deverá chamar a atenção do aluno que a relação de pertinência é usada de **elemento** para **conjunto**, como por exemplo:

$$2 \in B$$

E a relação de inclusão é usada de **conjunto** para **conjunto**, como por exemplo:

$$A \subset B$$

As propriedades das operações União e Interseção poderão ser apresentadas com terminologia: propriedade comutativa, propriedade associativa, pois tais propriedades serão muito usadas no decorrer do curso.

UNIDADE 2

NUMERAÇÃO

OBJETIVOS

1. Relacionar a correspondência biunívoca de conjuntos a conjuntos equivalentes e, conseqüentemente aos números naturais.
2. Construir o conjunto dos naturais e estabelecer as relações de ordem que permitem realizar a sucessão numérica.
3. Reconhecer as diferentes bases de sistemas de numeração para melhor compreensão do Sistema de Numeração de base 10.
4. Resolver situações relacionadas ao sistema decimal de numeração.
5. Ler e escrever quaisquer numerais, sabendo identificar o valor posicional dos algarismos do numeral.

DESENVOLVIMENTO

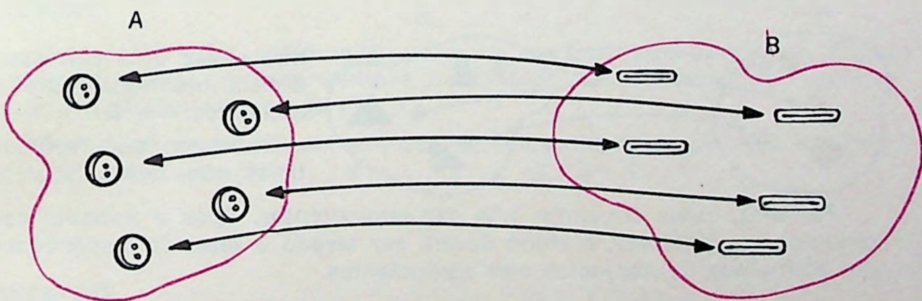
CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA: CONJUNTOS EQUIVALENTES OU EQUIPOTENTES.

Vejamos alguns conjuntos que possuem uma propriedade comum.

A blusa ao lado tem vários botões. Cada um é abotoado numa só casa.

Temos então:

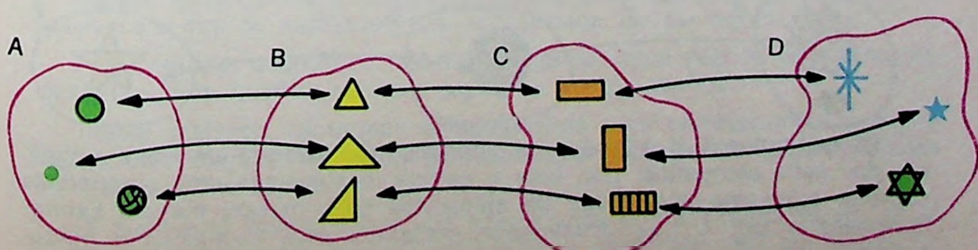
Conjunto de botões de blusa, que chamaremos de A e conjunto das "casas", que chamaremos de B.



Verificamos que a cada botão corresponde **uma** e **apenas uma** "casa". Cada "casa" é correspondente a **um só** botão.

Então, o conjunto A dos botões e B das "casas" estão em correspondência **"um a um"**, chamada de **correspondência biunívoca.**

Os conjuntos A, B, C, D também estão em correspondência biunívoca — segundo a indicação do desenho.



Quando existe uma correspondência biunívoca entre conjuntos, esses são denominados **conjuntos equipotentes.**

A eq B (Lê-se A equipotente a B)

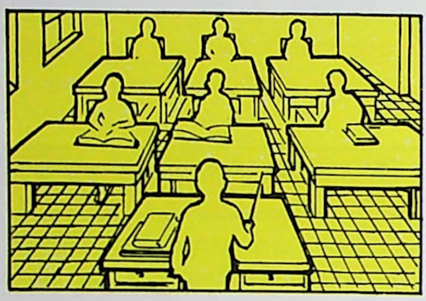
B eq C (Lê-se B equipotente a C)

C eq D (Lê-se C equipotente a D)

Vejamos um exemplo familiar dos conjuntos equipotentes.

Vamos supor que o professor entre na classe e mande todos os alunos se sentarem. Observemos então que, na gravura abaixo:

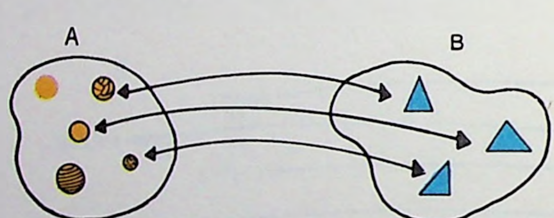
- Todas as carteiras estão ocupadas.
- Todos os alunos estão sentados.



Há uma correspondência biunívoca entre o conjunto de carteiras e o conjunto de alunos, pois a cada carteira corresponde um só aluno e cada aluno é correspondente de uma só carteira.

O professor deverá proporcionar aos alunos exercícios variados para a fixação de correspondência biunívoca e conjuntos equivalentes.

Vejamos agora estes conjuntos:



não existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

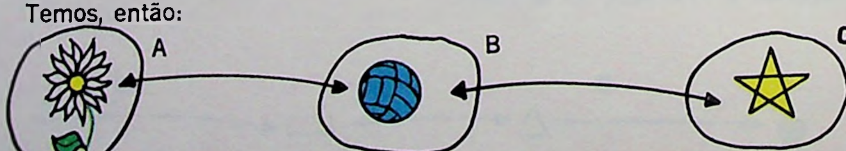
Observem que "sobram" bolas num deles.

Portanto, esses conjuntos não são equipotentes. Após o trabalho com conjuntos equipotentes, o aluno deverá ser levado a fazer correspondência com elementos de conjuntos não equipotentes.

O que acontece de importante entre conjuntos equipotentes?

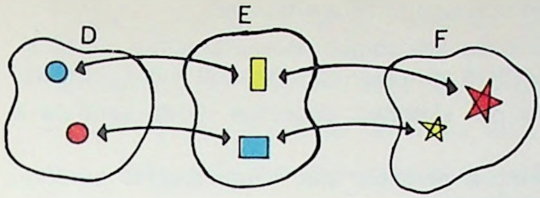
Pondo de lado a espécie dos elementos (carteiras, alunos, bolinhas e outros) que figuram nos conjuntos equipotentes e lembrando-se somente da correspondência biunívoca existente entre os seus elementos, destaca-se a permanência de uma propriedade comum: a **quantidade** ou **número de elementos,** também chamado **número natural.**

Temos, então:



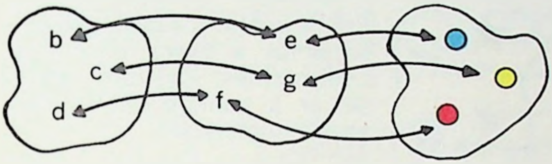
Os conjuntos A, B e C são equipotentes. Não levando em conta a espécie dos seus elementos: flor, bola e estrela, destacamos uma propriedade comum: **a mesma quantidade de elementos** ou o mesmo número natural denominado um e que usualmente anotamos com o algarismo hindu-arábico: 1

E, ainda:



Os conjuntos D, E, F são equipotentes. Têm como propriedade comum o mesmo número de elementos ou o mesmo número natural, chamado **dois** e representado muitas vezes pelo algarismo hindu-arábico: 2.

Já os conjuntos equipotentes:



têm como propriedade comum o mesmo número de elementos ou o mesmo número natural **três** indicado por: 3.

Podemos considerar outros conjuntos equipotentes, que possuem por propriedade comum, respectivamente, os números naturais:

- quatro, cinco, seis,... dez,... vinte,... cem,... mil,... ou, então em símbolos:

4, 5, 6,... 10,... 20,... 100,... 1000,...

ATENÇÃO

O conjunto vazio, como sabemos, é um conjunto sem elementos. Então o número natural correspondente à quantidade de elementos do conjunto vazio é o zero, representado por 0.

Formamos, assim, o conjunto dos números naturais, que será, em nosso trabalho, indicado por N. $N = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

ATENÇÃO

O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito. É fácil notar que não é possível escrevermos o "último" número natural, pois sempre se pode escrever o seguinte.

NOTA

Desde muitos anos, o homem foi levado a estabelecer correspondência biunívoca a fim de satisfazer sua necessidade de contagem.

Hoje em dia, quando por exemplo, jogamos uma partida de bilhar, assinalamos num quadro, ou num papel, os pontos ganhos.

Neste instante, estaremos estabelecendo uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos ganhos e o conjunto de marcas assinaladas no quadro ou no papel.

A professora poderá deixar que seus alunos reflitam rapidamente, se já surgiram oportunidades de usar conjuntos equipotentes para contagem, no seu dia-a-dia de vida.

Número e Numeral

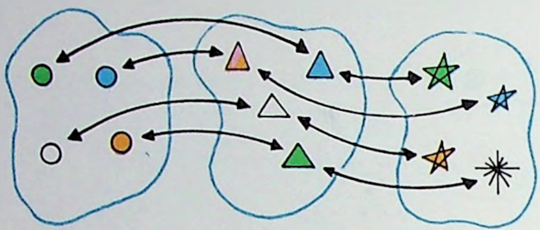
As palavras **número** e **numeral** têm significados diferentes.

Número é a idéia que associamos aos conjuntos equipotentes entre si, não dependendo da natureza ou ordem com que eles figuram nos conjuntos.

Esse número é representado por símbolos especiais. Cada símbolo é denominado **numeral.**

O professor deve levar o aluno a perceber que **a um mesmo número, podem corresponder diversos numerais.**

Por exemplo:



Propriedade comum: quatro. Então, quatro é a idéia que associamos a esses conjuntos equipotentes. Podemos representar o número quatro por vários numerais:

"4" "2 + 2" "4 X 1" "IV"

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Na prática, para simplificar a linguagem, não falaremos: "escreva o numeral do número quatro", e sim, "escreva o número quatro".

Quando representamos o número quatro, um dos numerais usados — IV — faz parte da numeração romana.

Esse sistema de numeração era usado pelos romanos, há muito tempo atrás, antes mesmo do nascimento de Cristo.

Ainda hoje ele é empregado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios, nomes de imperadores e papas.

Exemplos:

Imperador D. Pedro I   Papa Paulo VI   Capítulo III

Teremos assim de 1 a 10:

1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 9 — 10

I — II — III — IV — V — VI — VII — VIII — IX — X

O professor poderá falar nestes numerais apenas como curiosidade, pois seu uso atualmente é bem restrito. Caso os alunos se interessem pelo assunto, oportunidades de pesquisa devem ser dadas a fim de que descubram regras, para a escrita de todos os demais numerais. Essa escrita é feita através da combinação dos símbolos:

I — 1
V — 5
X — 10
L — 50
C — 100
D — 500
M — 1000

SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Relação de igualdade com números naturais

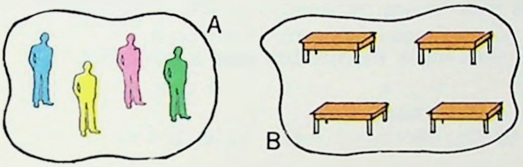
Voltemos a um exemplo dado de conjuntos equipotentes:

A — conjunto de alunos de nossa sala.

B — conjunto de carteiras de nossa sala.

Já vimos que existe uma correspondência biunívoca entre A e B, logo há uma propriedade comum: o conjunto A tem a mesma quantidade de elementos do conjunto B. Portanto, o mesmo número natural corresponde aos conjuntos A e B.

Vamos representar por **a** o número natural correspondente ao conjunto A e por **b** o número natural correspondente ao conjunto B. Notamos então que **a** e **b** são numerais diferentes do mesmo número, pois são escritos de maneira diferente.



a indica a quantidade de alunos, que no nosso exemplo é quatro. **b** indica a quantidade de carteiras, que também é quatro.

Então: a idéia, ou seja o número é o mesmo: quatro, e foi representado por **a** e **b** que são diferentes numerais do número quatro.

Concluímos então que os **números a** e **b** são iguais e escrevemos:

$a = b$ (lê-se: a é igual a b)

Assim como representamos por **a** e **b** a idéia de quantidade quatro, podemos usar vários numerais para representar a idéia de quantidade três.

Afirmamos que as sentenças abaixo são verdadeiras:

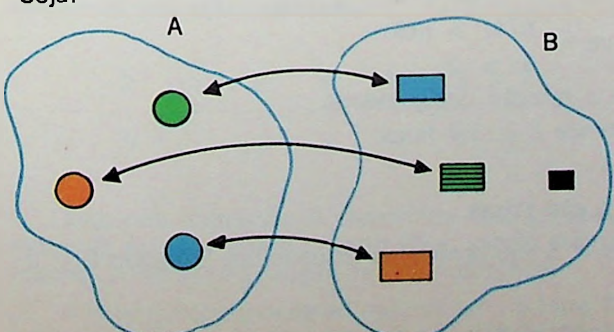
$3 = 3$
três $= 3$
$3 = 2 + 1$

$\boxed{a = a}$

Concluímos que: **Todo número natural é igual a ele mesmo**

Relação de desigualdade com os números naturais

Seja:



Esses conjuntos não estão em correspondência biunívoca, portanto, não são equipotentes.

O número de elementos do conjunto A é 3, ou abreviando, $n(A) = 3$ (lê-se: número de elementos do conjunto A é igual a 3).

O número de elementos do conjunto B é 4, ou abreviando, $n(B) = 4$.

Logo, se os conjuntos não estão em correspondência biunívoca, não podemos dizer que o número de elementos do conjunto A é igual ao número de elementos do conjunto B. Observamos, então, que as quantidades de elementos são diferentes e escrevemos:

$n(A) \neq n(B)$ que se lê: — o n.º de elementos do conjunto A é diferente do n.º de elementos do conjunto B.

Daí: $3 \neq 4$ (lê-se: três é diferente de quatro)

Notamos que o conjunto A tem menos elementos que o conjunto B.

Podemos então dizer que:

$n(A) < n(B)$ (lê-se: o número de elementos do conjunto A é menor do que o número de elementos do conjunto B)

ou

$3 < 4$ (lê-se: 3 é menor que 4)

Do mesmo modo, o conjunto B tem mais elementos que o conjunto A.

Então: $n(B) > n(A)$ (o símbolo indica maior que)

ou

$4 > 3$ (lê-se: 4 é maior que 3)

As sentenças matemáticas:

$8 > 5$ (lê-se 8 é maior que 5)
$5 < 7$ (lê-se 5 é menor que 7)
$4 > 1$ (lê-se 4 é maior que 1)
$0 < 8$ (lê-se 0 é menor que 8) são todas sentenças verdadeiras.

Já as sentenças:

$9 < 7$
$6 > 8$
$3 < 3$ são sentenças falsas, porque não exprimem uma verdade, pois $7 < 9$, $6 < 8$ e $3 = 3$.

O professor deverá variar os exercícios levando os alunos a trabalharem com tais relações de desigualdade.

ATENÇÃO: A relação de desigualdade só deverá ser usada entre números e **nunca** entre conjuntos.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ $n(A) = 3$

$B = \{0, 4,\}$ $n(B) = 2$

afirmamos que: $n(A) > n(B)$
$3 > 2$

Ainda trabalhando com a relação desigualdade:

Observamos que a sentença $3 < 3$ é falsa.

Assim também: $4 < 4$
$7 < 7$, são falsas.

Sabemos que $0 < 3$ e $3 < 5$ são sentenças verdadeiras. Também $0 < 5$ é sentença verdadeira.

Temos: $0 < 3$ e $3 < 5$ então $0 < 5$.

NOTA: O que analisamos para a relação de desigualdade $<$ (menor que) verifica-se também para a relação $>$ (maior que).

Exemplos:

1) $3 < 4$ e $4 < 7$ podemos afirmar, então, que $3 < 7$.

Podemos escrever a dupla desigualdade:

$3 < 4 < 7$ que indica estarem os números 3, 4, 7 dispostos em ordem crescente, isto é, do menor para o maior.

2) Se $8 > 5$ e $5 > 2$ então $8 > 2$.

Podemos escrever outra dupla desigualdade:

$8 > 5 > 2$ que indica estarem os números 8, 5, 2 dispostos em ordem decrescente.

ATENÇÃO Numa comparação entre dois números naturais quaisquer **a** e **b** é possível uma das conclusões:

$a = b$ ou $a < b$ ou $a > b$

(a é igual b) (a é menor do que b) (a é maior do que b)

Você já deve muitas vezes ter sentido necessidade de ordenar objetos, fatos etc.

Veja bem nosso alfabeto. Todas as letras seguem uma ordem:

a vem antes de b
b vem antes de f
m vem antes de n,

e daí em diante. Assim, certas tarefas, como procurar o nome em uma lista onde todos estão escritos em ordem alfabética, serão bem mais fáceis de serem realizadas.

Sentimos também a necessidade de ordenar o conjunto dos números naturais. E para isto lançamos mão das relações de desigualdade.

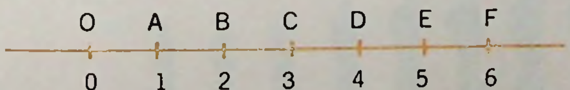
Deste modo podemos dizer exatamente quando um número vem antes ou depois de outro número. Para isso basta verificar se ele é:

maior
ou
menor que o número dado.

$7 > 6$ logo 7 vem depois de 6

$5 < 8$ logo 5 vem antes de 8.

Para sentir melhor esta ordem, podemos representar os números naturais sobre uma **reta numerada.**



Esta reta numerada é construída assim: faz-se uma marca, que chamaremos O, sobre a reta e a partir dela, vamos marcando partes de mesmo tamanho. A letra O é a origem da reta numerada.

A letra O corresponde ao natural zero, a letra A corresponde ao natural 1, a letra B corresponde ao natural 2, e assim em diante.

Note que: 5 vem depois de 2 e $5 > 2$

3 vem antes de 4 e $3 < 4$

Isto nos leva a dizer que:

Um n.º é maior que outro quando vem depois deste outro e um n.º é menor que outro quando vem antes deste outro.

Exemplo:

$6 > 4$, pois 6 vem depois de 4

$3 > 2$, pois 3 vem depois de 2

$0 < 3$, pois 0 vem antes de 3

$5 < 6$, pois 5 vem antes de 6

$8 > 7$, pois 8 vem depois de 7

Note que nos dois últimos exemplos apresentados podemos afirmar que:

5 vem **logo antes** de 6 e 8 vem **logo depois** de 7

Nesse caso dizemos que:

5 é **antecessor** de 6 e 8 é **sucessor** de 7

Então podemos afirmar que:

1) Se um dado número é **antecessor** de outro ele virá **logo antes** desse outro.

O antecessor de 10 é 9.

2) Se um dado número é **sucessor** de outro então ele virá **logo depois** deste outro.

O sucessor de 13 é 14 e o sucessor de 8 é 9.

ATENÇÃO: Qualquer número natural tem um sucessor.
Zero não é sucessor de nenhum número natural e portanto é o menor deles.

Número Ordinal

Imagine que você está na fila do Posto Médico para ser atendido e bastante interessado em saber quando será sua vez.

Resolve então contar quantas pessoas existem na sua frente.

Que surpresa! Apenas 6. Logo, você corresponde ao número 7, ou melhor dizendo, você é o **sétimo** da fila.

Assim você pode saber exatamente a sua **posição** na fila, sabendo a posição de cada um.

O que corresponde ao n.º 1 é o **primeiro** da fila e escrevemos: 1.º.

O correspondente ao n.º 2 é o **segundo** da fila e escrevemos: 2.º.

Estes números que indicam a posição ou a ordem de pessoas, objetos, etc., são chamados números ordinais e são:

NÚMEROS NATURAIS	NÚMEROS ORDINAIS	LEITURA DO NÚMERO ORDINAL
1	1.º	primeiro
2	2.º	segundo
3	3.º	terceiro
4	4.º	quarto
5	5.º	quinto
6	6.º	sexto
7	7.º	sétimo
8	8.º	oitavo
9	9.º	nono
10	10.º	décimo
11	11.º	décimo primeiro
12	12.º	décimo segundo
13	13.º	décimo terceiro
.	.	.
.	.	.
.	.	.
19	19.º	décimo nono
20	20.º	vigésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
30	30.º	trigésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
40	40.º	quadragésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
50	50.º	qüinquagésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
60	60.º	sexagésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
70	70.º	septuagésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
80	80.º	octogésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
90	90.º	nonagésimo
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	100.º	centésimo

Relação de pertinência e inclusão no conjunto dos números naturais

O nosso conjunto universo será o conjunto dos números naturais.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Podemos destacar vários subconjuntos:

Por exemplo:

O conjunto dos números naturais **maiores do que** 6 e **menores do que** 10.
$A = \{7, 8, 9\}$

O conjunto dos números naturais **entre** 8 e 12 $B = \{9, 10, 11\}$

O conjunto dos números naturais **de** 9 **até** 13 $C = \{9, 10, 11, 12, 13\}$

Então, são sentenças verdadeiras: $A \subset N$; $B \subset N$; $C \subset N$

Note que: A, B e C são conjuntos finitos.

Outros exemplos:

Sejam:

E é o conjunto dos números naturais **menores do que** 5.

F é o conjunto dos números naturais **entre** 3 e 6.

G é o conjunto dos números naturais **menores do que** 8.

Sabemos que:

$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$F = \{4, 5\}$

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Vamos verificar se as sentenças abaixo são falsas ou verdadeiras:

$6 \in E$ $\quad E \subset G$

$7 \notin G$ $\quad G \subset N$

$4 \in F$ $\quad F \subset E$

Temos que:

$4 \in F$ verdadeiro, pois 4 é elemento de F.

$6 \in E$ falso, pois $6 \notin E$: 6 não é elemento de E, pois $6 > 5$ (seis é maior do que cinco)

$7 \notin G$ falso, pois $7 \in G$: 7 é elemento de G.

$F \subset E$ falso, pois $5 \in F$ e $5 \notin E$.

$E \subset G$ verdadeiro, pois todos os elementos de E pertencem a G.

$G \subset N$ verdadeiro, pois todos os elementos de G pertencem ao conjunto de números naturais.

Observe agora o conjunto:

$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

É fácil perceber que:

$2 \in P$, pois 2 é elemento de P e $7 \notin P$, pois 7 não é elemento de P

O conjunto P é um conjunto infinito e, pela enumeração dos seus elementos, podemos notar que só serão elementos de P os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8.

Então, podemos afirmar que as sentenças abaixo são verdadeiras:

$20 \in P$

$21 \notin P$

$P \subset N$, pois todo elemento que pertence a P, também pertence a N.

Estabelecemos, assim, um subconjunto dos números naturais — **conjunto dos números pares.**

Dizemos que um número é **par** se ele termina em 0, 2, 4, 6, 8.

Então:

8, 12, 16 e 24 são exemplos de números pares.

Podemos ainda destacar um outro subconjunto dos naturais — **conjunto dos números ímpares.**

$I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$

Observamos ser, também, um conjunto infinito e, pela enumeração dos seus elementos, podemos notar que **número ímpar** é o que termina em 1, 3, 5, 7, 9.

Portanto:

7 é um número ímpar, $7 \in I$

25 é um número ímpar, $25 \in I$

16 não é um número ímpar, $16 \notin I$

ATENÇAO

Dado um número natural qualquer, ele pertencerá ao conjunto dos números pares ou ao conjunto dos números ímpares.

Será que poderíamos encontrar um número natural que fosse elemento comum ao conjunto de números pares e conjunto de números ímpares?

Constatamos, facilmente, que não.
Daí, concluímos que a interseção entre estes conjuntos é vazia.

$P \cap I = \emptyset$

O professor deverá proporcionar variados exercícios nesta fase, dando assim maior oportunidade ao aluno de trabalhar com subconjuntos de números naturais.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO — BASE DE UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Para que possamos ler e escrever qualquer número com exatidão, usando poucos símbolos e poucas palavras, precisamos lançar mão de regras e normas.

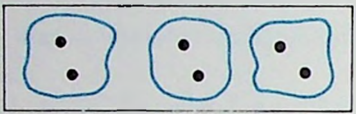
Sistema de numeração é, exatamente, o conjunto de regras usadas para tornar possível a leitura e escrita dos números.

O sistema de numeração sofre várias modificações e adquire formas variadas de acordo com épocas, condições de vida e desenvolvimento tecnológico dos povos.

Um Sistema de Numeração fica caracterizado no momento em que se estipula o número de elementos de seus agrupamentos.

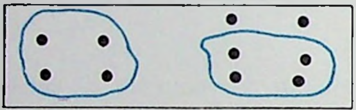
Esse número é chamado **base** de um Sistema de Numeração.

Assim:



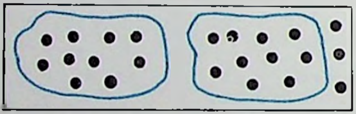
Podemos agrupar os elementos desse conjunto 2 a 2.

Estaremos trabalhando com a base 2.



Agrupamos os elementos desse conjunto 4 em 4.

Estaremos trabalhando com a base 4.



Agrupamos os elementos de 10 em 10.

Estaremos trabalhando com a base 10.

Este último exemplo apresentado, a base 10, é a mais usada **desde** a Antiguidade, possivelmente levados pela necessidade de fazer corresponder aos dedos das duas mãos, que são exatamente dez.

O sistema de numeração de base dez é chamado Sistema de Numeração Decimal.

Estudaremos este sistema mais detalhadamente, pois é o que empregamos para escrita e leitura dos números.

É impossível criarmos nomes e símbolos para cada número natural.

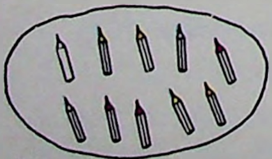
Procuramos, então, com apenas alguns símbolos, escrever qualquer número natural.

Estes símbolos são chamados **algarismos.**

Para escrevermos qualquer número na base dez, usamos os algarismos:

0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 9

Surgiu então o problema: Como representar a quantidade de objetos de um conjunto, com mais de nove elementos?



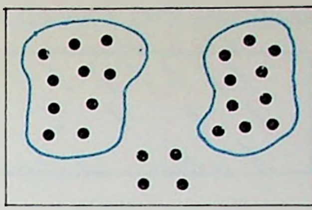
Suponha então que você possui um conjunto de dez lápis

Vamos agora formar grupos de dez.

Temos então apenas um grupo de dez lápis.

Dizemos então que temos uma **dezena** de lápis. Como cada lápis representa um objeto, cada lápis é dito ser **uma unidade.**

Se tivéssemos vinte e quatro lápis, teríamos dois grupos de dez e ainda sobrariam quatro lápis. Como cada grupo de dez forma uma dezena, então em 2 grupos de dez teremos duas dezenas, sobrando quatro unidades.



E se tivéssemos apenas 6 lápis?

É fácil notar que não formaríamos nenhuma dezena, mas teríamos 6 unidades

Concluindo:

- uma unidade ⟶ representa apenas um elemento do conjunto.
- uma dezena ⟶ representa um grupo de dez elementos do conjunto.

O professor deverá dar bastante ênfase às noções de dezena e unidade a fim de preparar seus alunos para a escrita de um número natural qualquer.

Como escrever então os números?

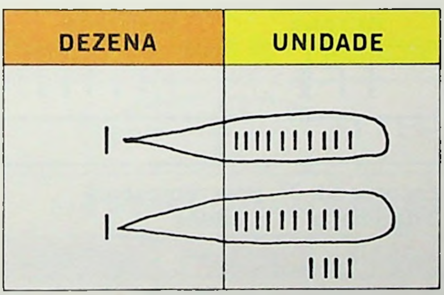
O professor poderá desenvolver a seguinte atividade:

Peça a um aluno que venha à frente da turma e comece a contar os elementos da classe, assinalando com um traço no quadro cada aluno que já foi contado.

Ao chegar ao fim da contagem, o professor deverá lançar o problema de como escrever o numeral que indica a quantidade daquele conjunto formado pelos alunos da classe.

Vamos supor então que o aluno parou a contagem em vinte e quatro.

O professor, utilizando o quadro valor de lugar, levará o aluno a representar de modo concreto a situação surgida.



Os alunos poderão desenhar no caderno o quadro valor de lugar e representar o número de alunos da classe. Na casa que representa as unidades só podemos ter 9 elementos no máximo. Quando colocamos outros elementos, precisamos fazer agrupamentos de dez elementos, e passá-los para a casa à esquerda: a das dezenas. Cada casa é chamada de uma **ordem** e assim passaremos a denominá-la.

Temos então, em vinte e quatro, 2 grupos de dez, ou seja, duas dezenas e quatro unidades.

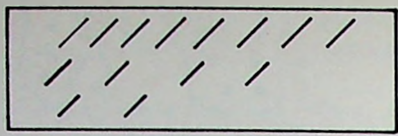
Logo o numeral procurado é escrito:

24 (lê-se vinte e quatro).

DEZENA	UNIDADE
I I	I I I I
2	4

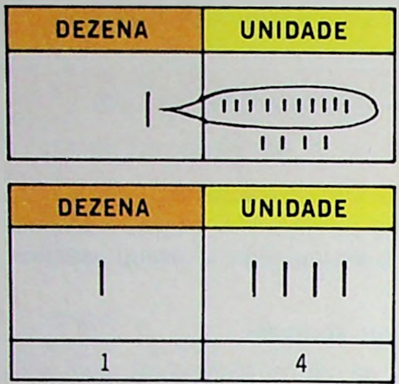
O professor deverá variar bastante os exercícios deste tipo, a fim de levar os alunos a sentirem a necessidade do reagrupamento.

Exemplos: Para a escrita do n.º quatorze



quatorze elementos, logo, 14 unidades.

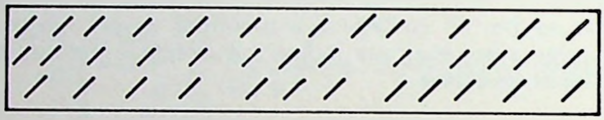
Reagrupando:



Escreve-se **14**, pois representa 1 dezena e 4 unidades.

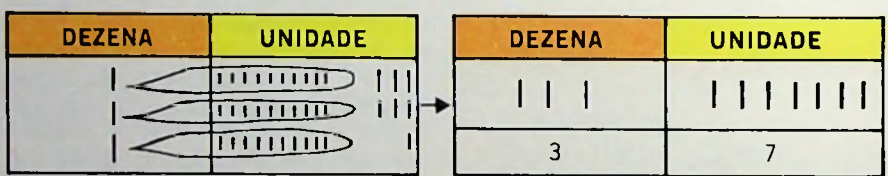
Logo: o algarismo 1 ocupa a ordem das dezenas e o algarismo 4, a ordem das unidades.

Para a escrita do número trinta e sete:



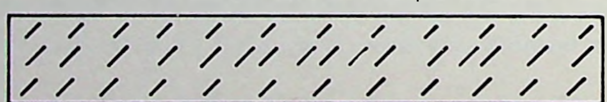
trinta e sete unidades

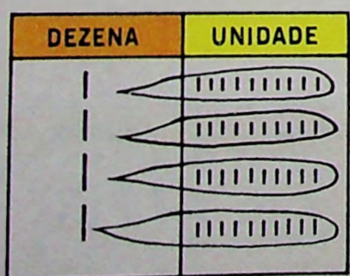
Reagrupando:

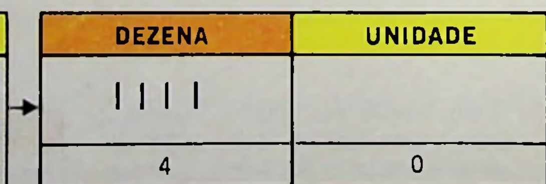


Escreve-se: 37, pois representa 3 dezenas e 7 unidades

Para a escrita do número quarenta:







Temos assim quatro grupos de dez (quatro dezenas) não restando nenhuma unidade, na ordem das unidades.

Escreve-se então 40, onde o quatro representa as dezenas e o zero a ausência de unidades na ordem das unidades.

O professor poderá trabalhar primeiro com as dezenas não exatas como 13, 24, 45, etc... para em seguida lançar as dezenas exatas como 20,30,50, etc...

Podemos afirmar então:

Toda vez que temos um conjunto de dez unidades, podemos reagrupá-lo em uma dezena.

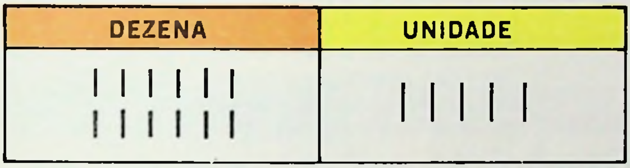
O último algarismo à direita do numeral representa a ordem das unidades e o algarismo mais próximo à esquerda, indica a ordem das dezenas.

Assim:

21 ⟶ 2 dezenas e 1 unidade

95 ⟶ 9 dezenas e 5 unidades

Observe agora o exemplo:



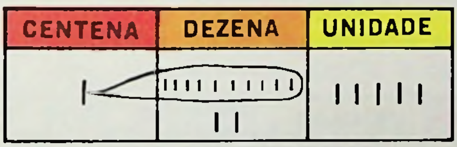
Temos aqui 12 na ordem das dezenas e 5 na ordem das unidades.

Mas já vimos que em uma ordem só podemos ter 9 elementos no máximo.

Logo, os elementos das dezenas deverão ser reagrupados.

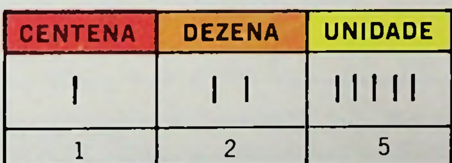
Surge então a necessidade de formarmos uma nova casa também à esquerda.

Teremos então:



Para esta nova casa, ou seja, para esta nova ordem, vai o grupo formado de dez dezenas, e cada dezena é um grupo de dez unidades.

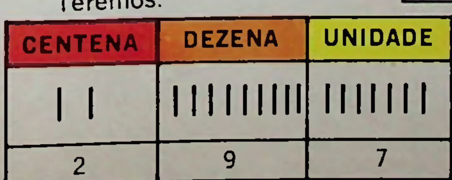
Esta ordem é chamada **ordem das centenas** e poderíamos escrever:



Obtivemos assim o número 125 (lê-se cento e vinte e cinco) que é formado de: 1 centena, 2 dezenas e 5 unidades.

Vejamos mais um exemplo:

Teremos:



Formamos o número 297 (duzentos e noventa e sete) onde:

2 ocupa a ordem das centenas
9 ocupa a ordem das dezenas
7 ocupa a ordem das unidades

Podemos afirmar então:

> Toda vez que temos um conjunto de dez dezenas, podemos reagrupá-lo em uma centena.

> O último algarismo à direita do numeral representa a ordem das unidades, o que vem imediatamente à esquerda das unidades representa a ordem das dezenas e o algarismo à esquerda das dezenas representa a ordem das centenas.

Então:

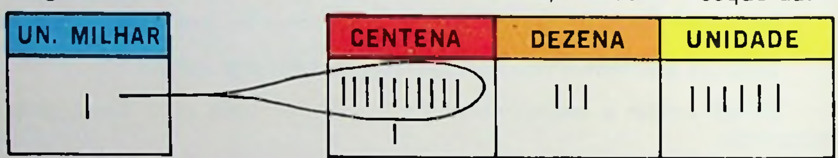
134 ⟶ 1 centena, 3 dezenas e 4 unidades.

Observe agora o exemplo:

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
IIIII IIIII I	III	IIIIII

Temos 11 na ordem das centenas, 3 na ordem das dezenas e 6 na ordem das unidades. Como não podemos em uma ordem ter mais do que 9 elementos, vamos reagrupá-los.

Surge, então, a necessidade de uma nova casa, também à esquerda.



Para esta nova casa, ou seja, para esta nova ordem, vai o grupo formado de dez centenas.

Esta ordem é chamada **ordem das unidades de milhar** e poderíamos escrever:

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I	I	III	IIIIII
1	1	3	6

Obtivemos assim o número 1.136 (lê-se: mil cento e trinta e seis) que é formado de: 1 unidade de milhar, 1 centena, 3 dezenas e 6 unidades.

Observando o desenho acima, notamos que a ordem das unidades de milhar foi colocada separada das demais. Tivemos este cuidado, pois as ordens já apresentadas (unidades, dezenas e centenas) formam uma **classe:** a classe das unidades simples, isto é, a 1.ª classe de um número.

A ordem das unidades de milhar é a 1.ª ordem da 2.ª classe de um número — a classe dos milhares. Esta classe dos milhares tem, também, as 3 ordens: unidades, dezenas e centenas, que surgem à medida que novos reagrupamentos vão sendo feitos.

Outros exemplos: ⟶

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
IIIIIIIIII IIIIIIIIII	IIII	II

Reagrupando:

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I I	IIIIIIIIII IIIIIIIIII	IIII	II

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
II		IIII	II
2	0	4	2

Logo, o número 2.042 tem 2 unidades de milhar, 4 dezenas e 2 unidades. Quando destacamos que algarismo ocupa cada ordem, estamos **decompondo o número em diferentes ordens.**

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
IIIIII IIIIII	II	IIIII	III

Reagrupando:

DEZ. MILHAR	UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I	IIIIIIIIII II	II	IIIII	III

DEZ. MILHAR	UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I	II	II	IIIII	III
1	2	2	5	3

Observe que a nova ordem, dezena de milhar, é a segunda ordem da classe dos milhares.

Logo o número 12.253 decomposto em ordens ficará: 1 dezena de milhar, 2 unidades de milhar, 2 centenas, 5 dezenas e 3 unidades.

DEZ. MILHAR	UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
IIIIIIIIII IIIIIIIIII II	III	IIIIII	II	IIII

Reagrupando:

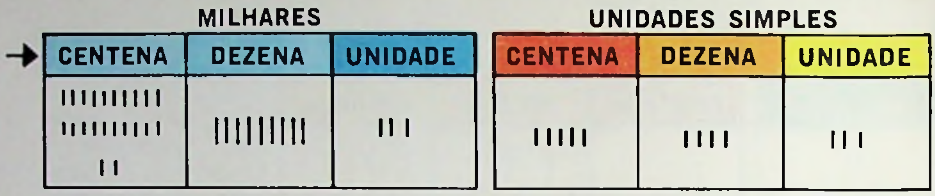
CENT. MILHAR	DEZ. MILHAR	UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I I	IIIIIIIIII IIIIIIIIII II	III	IIIIII	II	IIII

CENT. MILHAR	DEZ. MILHAR	UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
II	II	III	IIIIII	II	IIII
2	2	3	6	2	4

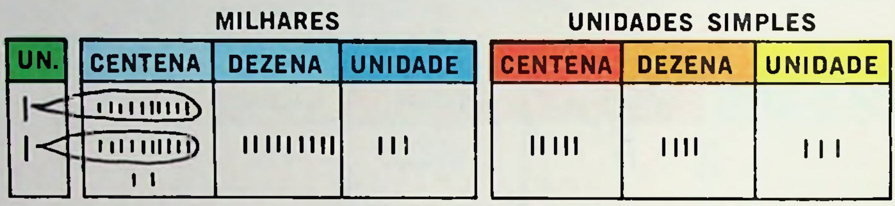
Observe que a nova ordem, centena de milhar, é a terceira ordem da classe dos milhares.

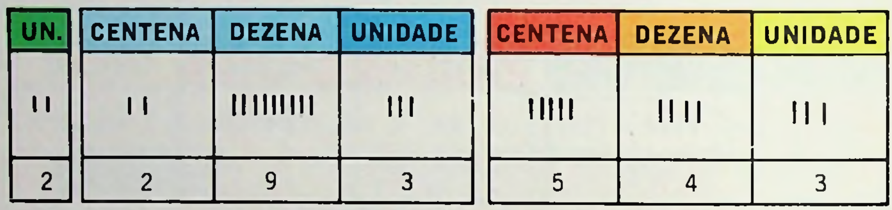
O número 223.624 tem 2 centenas de milhar, 2 dezenas de milhar, 3 unidades de milhar, 6 centenas, 2 dezenas e 4 unidades.

Com a nova ordem, centena de milhar, fica completa a classe dos milhares. Toda classe completa possui as 3 ordens (unidade, dezena e centena).



Reagrupando:





Colocamos a ordem das unidades de milhões separada das demais, pois ela será a primeira ordem de uma nova classe — classe dos milhões — 3.ª classe de um número.

O número 2.293.543 tem 2 unidades de milhão, 2 centenas de milhar, 9 dezenas de milhar, 3 unidades de milhar, 5 centenas, 4 dezenas e 3 unidades.

Este número tem 7 ordens e 3 classes.

ATENÇÃO: A terceira classe está incompleta, pois sabemos que uma classe completa tem 3 ordens.

Novas ordens e classes se formarão de acordo com a seqüência usada até agora.

Resumindo:

1.ª ordem: unidades
2.ª ordem: dezenas
3.ª ordem: centenas
} 1.ª classe: unidades simples

4.ª ordem: unidades de milhar
5.ª ordem: dezenas de milhar
6.ª ordem: centenas de milhar
} 2.ª classe: milhares

7.ª ordem: unidades de milhão
8.ª ordem: dezenas de milhão
9.ª ordem: centenas de milhão
} 3.ª classe: milhões

e poderemos ter a seguir a classe dos bilhões, trilhões etc.

Leitura dos números

Já é do conhecimento do aluno a leitura dos números até 999. Ao recordá-la, o professor lembrará que, em Português, os nomes para a leitura de qualquer número surgem de algumas combinações dos nomes de seus algarismos. Assim, por exemplo, dizemos:

98 = noventa e oito

327 = trezentos e vinte e sete

540 = quinhentos e quarenta

Da mesma maneira lemos os números acima de 1.000:

1.008 = mil e oito

1.110 = mil cento e dez

2.307 = dois mil, trezentos e sete

5.046 = cinco mil e quarenta e seis

9.731 = nove mil, setecentos e trinta e um

42.685 = quarenta e dois mil, seiscentos e oitenta e cinco

671.433 = seiscentos e setenta e um mil, quatrocentos e trinta e três

3.592.910 = três milhões, quinhentos e noventa e dois mil, novecentos e dez

Observe o número 671.433. Ele é formado por 6 centenas de milhar, 7 dezenas de milhar, 1 unidade de milhar, 4 centenas, 3 dezenas e 3 unidades.

Vemos que o mesmo algarismo 3 representa a ordem das unidades e a ordem das dezenas. Logo, ele ocupa 2 posições. Na ordem das unidades seu valor é 3 e, na ordem das dezenas, seu valor é 30 ou 3 dezenas. Cada algarismo tem um valor diferente dependendo da ordem que ocupa no número. Este valor é chamado de **valor relativo.**

Tomando cada algarismo isoladamente, temos o seu **valor absoluto.**
No número 671.433, o valor absoluto de 6 é 6 e o valor relativo é 600.000 (seis centenas de milhar).

Outro exemplo:

No número 3.592.910, o valor relativo do algarismo que ocupa a ordem das centenas é 900 e o seu valor absoluto é 9; o valor relativo do algarismo que ocupa a ordem das dezenas de milhar é 90.000 e seu valor absoluto é 9.

Por tudo que já vimos de numeração, podemos dizer que o sistema de numeração decimal tem as seguintes características:

1.º) É de base 10

Fazemos agrupamento de dez em dez, isto é, dez elementos de um conjunto formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena e assim por diante.

2.º) Usa os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 para a escrita de qualquer outro número natural.

3.º) Obedece ao Princípio de Posição Decimal que diz:

"Todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior (dez vezes) à desse outro."

Exemplo: Observe o número 137
O algarismo 1 está escrito imediatamente à esquerda do algarismo 3.

O algarismo 1 representa a ordem das centenas e o algarismo 3 representa a ordem das dezenas. E sabemos que a ordem das centenas é imediatamente superior à ordem das dezenas.

Sinais Símbolos	Escrita	Leitura
eq	A eq B	A **equipotente** a B
N	$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$	**conjunto** dos números naturais
n(A)	$n(A) = 3$	o **número de elementos** do conjunto A é 3
$=$	$a = b$	a é **igual** a b
$\neq$	$a \neq b$	a é **diferente** de b
$<$	$3 < 4$	3 é **menor** que 4
$>$	$8 > 5$	8 é **maior** que 5

NOTAS PARA O PROFESSOR

A numeração romana deve ser dada apenas para que o aluno possa ler: nomes como Papa Paulo VI, Imperador D. Pedro II; mostradores de relógios, numeração de capítulos de livros. O aluno não vai aprender as regras para a escrita e leitura deste tipo de numeração.

Logo não é necessário dar muita ênfase a esta parte do assunto.

Aos sistemas de numeração de bases não decimais não se deve dar muita ênfase. Falaremos neles apenas para mostrar ao aluno as diferentes formas de agruparmos os elementos de um conjunto. Assim chegaremos aos agrupamentos de 10 elementos, quando então passamos a trabalhar com o sistema de numeração decimal. Este sim, é de grande importância em todo o nosso estudo.

UNIDADE 3

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

OBJETIVOS

1) Identificar a adição como uma operação decorrente da união de conjuntos disjuntos.
2) Reconhecer a subtração como operação inversa da adição.
3) Identificar a multiplicação como operação decorrente do produto cartesiano entre conjuntos.
4) Reconhecer a divisão como operação inversa da multiplicação.
5) Resolver operações com números naturais com rapidez e exatidão.
6) Empregar adequadamente as propriedades das operações com números naturais.
7) Efetuar e aplicar adequadamente a operação potenciação com números naturais.
8) Transformar situações problemáticas em sentenças matemáticas e resolvê-las adequadamente.

DESENVOLVIMENTO

ADIÇÃO

Conceito da operação

Consideremos dois conjuntos A e B.

$A = \{ \bigcirc, \triangle, \ast \}$ e $B = \{ \Diamond, \square \}$

Verificamos que A possui 3 elementos, logo n (A) = 3, e que B possui 2 elementos, então n (B) = 2.

Observamos, também, que $A \cap B = \emptyset$, isto é, A e B não possuem elementos comuns. Formemos a união de A e B:

$R = A \cup B = \{ \bigcirc, \triangle, \ast, \Diamond, \square \}$ Notamos que o novo conjunto tem 5 elementos: n (R) = 5.

Realizamos a união dos dois conjuntos. Associamos ao par (3, 2), formado pelo número de elementos dos conjuntos A e B, respectivamente, o número de elementos do conjunto-reunião, isto é, 5.

Esta associação introduz a operação de adição entre 3 e 2

n(A)	n(B)	n(A∪B)
↓	↓	↓
3	2	5

Escrevemos: $3 + 2 = 5$

3 e 2 são os termos da operação e se denominam parcelas, + é o sinal da adição e 5, que é o resultado da operação, chama-se soma ou total.

Observemos que, ao adicionarmos dois números naturais quaisquer, o resultado é sempre outro número natural.

Comutativa

Tomemos dois conjuntos:

$$A = \{ 1, 2, 4 \} \quad e \quad B = \{ 5, 8 \}$$

Temos que $A \cup B = \{ 1, 2, 4, 5, 8 \}$ e $B \cup A = \{ 5, 8, 1, 2, 4 \}$

Como já sabemos $A \cup B = B \cup A$, pois os elementos de $A \cup B$ são os mesmos elementos de $B \cup A$, embora escritos em ordem diferente. Temos que $n(A \cup B) = 5$ e $n(B \cup A) = 5$.

Bem, $n(A) = 3$ e $n(B) = 2$. Efetuemos a adição entre os números de elementos de cada conjunto:

$$3 + 2 = 5 \quad e \quad 2 + 3 = 5$$

Verificamos que $3 + 2 = 2 + 3 = 5$. Esse fato ocorre com quaisquer números.

Ao trabalharmos com números naturais, concluímos que "a ordem das parcelas não altera a soma". Lembre-se: sempre que aparecer $a \in N$, estamos nos referindo a um número natural qualquer. Isto vale para qualquer outra letra do alfabeto minúsculo que usarmos.

Se: $a \in N$, $b \in N$ então $a + b = b + a$

A ordem das parcelas não altera a soma

Elemento Neutro: 0

Consideremos um conjunto $A = \{ \square , \triangle \}$ e o conjunto vazio: $\emptyset$
Temos que $A \cup \emptyset = \{ \square \triangle \} \cup \emptyset = \{ \square \triangle \} = A$. Sabemos que $n(A) = 2$ e $n(\emptyset) = 0$; efetuando a adição entre os números de elementos do conjunto A e do vazio, teremos:

$$\begin{array}{ccccc} n(A) & + & n(\emptyset) & = & n(A \cup \emptyset) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & + & 0 & = & 2 \end{array}$$

Notamos que, adicionando o número zero a qualquer número natural, o resultado é sempre o próprio número natural.

Por exemplo:

$4 + 0 = 0 + 4 = 4$

De um modo geral

Se $a \in N$, então $a + 0 = 0 + a = a$

Associativa

Tomemos 3 conjuntos $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{7\}$

Façamos a união desses conjuntos, unindo primeiramente dois conjuntos.

$A \cup B = \{1, 3, 2, 4, 6\}$

Ao resultado desta união, vamos unir o outro conjunto:

$\{1, 3, 2, 4, 6\} \cup C = \{1, 3, 2, 4, 6, 7\}$

Existe outra maneira de fazermos a reunião:

$B \cup C = \{2, 4, 6, 7\}$

$A \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 2, 4, 6, 7\}$

Concluímos que: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Sabemos que: $n(A) = 2$ $n(B) = 3$ $n(C) = 1$.

Fazendo corresponder a cada conjunto o seu número de elementos temos:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1)$

Se adicionarmos três números naturais, esta adição poderá ser feita agrupando, ou seja, associando as duas primeiras parcelas ou as duas últimas parcelas.

$2 + 3 + 1 = (2 + 3) + 1 = 5 + 1 = 6.$

$2 + 3 + 1 = 2 + (3 + 1) = 2 + 4 = 6$

Então podemos concluir: $(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1)$

De um modo geral

Se $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$ então $(a + b) + c = a + (b + c)$

• Concluímos que: "Numa adição de mais de duas parcelas, sempre se pode substituir duas (ou mais) destas parcelas pela sua soma."

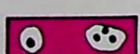
Exemplo: $4 + 2 + 3 = (4 + 2) + 3$

$4 + 2 + 3 = 6 + 3$

Técnicas de cálculo

Formemos um conjunto de 4 elementos 

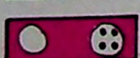
Tentemos descobrir, nesse conjunto, subconjuntos que dois a dois nos forneçam o total de elementos do conjunto dado.

 — um subconjunto de 1 elemento e outro de 3 elementos

 — um subconjunto de 2 elementos e outro de 2 elementos

 — um subconjunto de 3 elementos e outro de 1 elemento

 — um subconjunto de 4 elementos e outro subconjunto vazio

 — um subconjunto vazio e outro de 4 elementos.

Unamos, agora, num só conjunto os subconjuntos determinados em cada item. O conjunto encontrado será o inicialmente apresentado, que possui 4 elementos.

— um subconjunto de 1 elemento unido a outro subconjunto de 3 elementos forma um conjunto de 4 elementos

$1 + 3 = 4$

Assim faremos todas as combinações possíveis

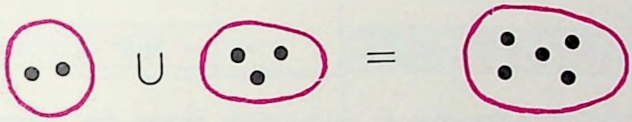
$1 + 3 = 4$		$3 + 1 = 4$
$2 + 2 = 4$		$2 + 2 = 4$
$3 + 1 = 4$	ou	$1 + 3 = 4$
$4 + 0 = 4$		$0 + 4 = 4$
$0 + 4 = 4$		$4 + 0 = 4$

pois já sabemos que a adição é comutativa.

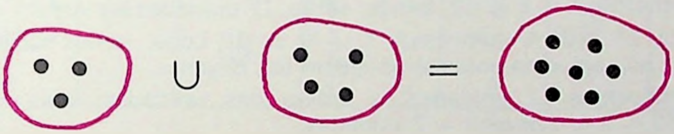
O que fizemos para um conjunto de 4 elementos, podemos fazer para conjuntos de 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 ou mais elementos.

Realizemos, agora, as seguintes adições:

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I	I I
1	2

Vamos utilizar casas de numeração, onde cada casa representa uma ordem: unidade, dezena, centena, etc.

Queremos adicionar 10 e 2. Então colocamos na 1.ª casa, isto é, 1.ª ordem, as unidades da ordem das unidades, dos dois números. Como, $0 + 2 = 2$, teremos 2 unidades na casa das unidades. Na 2.ª ordem, colocamos as dezenas $1 + 0 = 1$. Obtemos, então:

2 na ordem das unidades.

1 na ordem das dezenas.

Concluímos que só podemos adicionar unidades da mesma ordem.

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ 23 \\ \hline 34 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I I I	I I I I
3	4

$11 = 10 + 1 = 1$ dezena $+$ 1 unidade
$23 = 20 + 3 = 2$ dezenas $+$ 3 unidades

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 41 \\ \hline 59 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I	IIIIIIII
IIII	I
5	9

$18 = 10 + 8 = 1$ dezena $+ 8$ unidades
$41 = 40 + 1 = 4$ dezenas $+ 1$ unidade

Na adição de 3 ou mais parcelas utilizamos a propriedade associativa.

Assim temos:

$$\begin{array}{rl} 4 & 7 \\ 3 & \\ 2 & \\ \hline 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5 & 7 \\ 2 & \\ 4 & \\ \hline 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 12 & 25 \\ 13 & \\ 14 & \\ \hline 39 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 20 & 38 \\ 18 & \\ 31 & \\ \hline 69 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 43 & 53 \\ 10 & \\ 24 & \\ \hline 77 & \end{array}$$

Vejamos, agora, a seguinte adição:

DEZENA	UNIDADE
I	IIIIIII
	IIIII

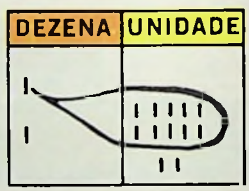
$$\begin{array}{r} 17 \\ +\ 5 \\ \hline 22 \end{array}$$

Na 1.ª ordem, colocamos as unidades da ordem das unidades do 1.º e 2.º números: $7 + 5 = 12$, temos, então, 12 unidades na ordem das unidades.

Na 2.ª ordem, colocamos $1 + 0 = 1$. Logo, temos 1 unidade de 2.ª ordem, ou seja, uma unidade na ordem das dezenas.

Obtivemos 12 unidades na ordem das unidades, mas sabemos que: $12 = 10 + 2 = 1$ dezena $+ 2$ unidades.

Esta dezena, mudamos para a ordem das dezenas.

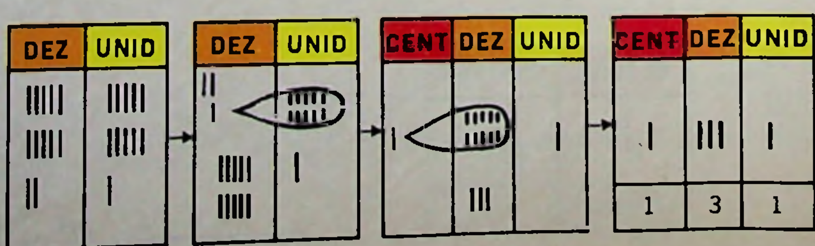


Temos agora: 2 unidades na ordem das unidades e 2 unidades na ordem das dezenas (1 dezena mais 1 dezena que veio da ordem das unidades).

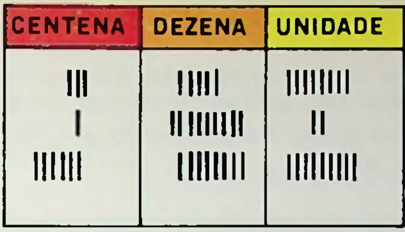
DEZENA	UNIDADE
II	II
2	2

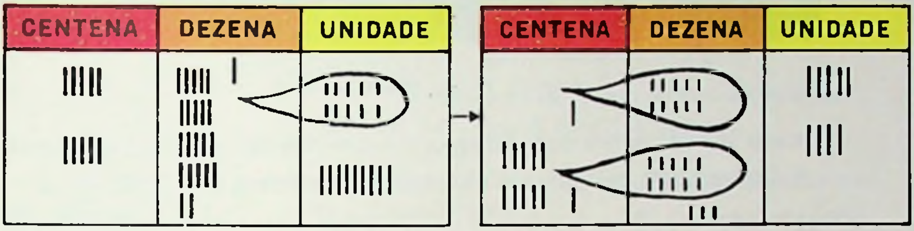
Outros exemplos:

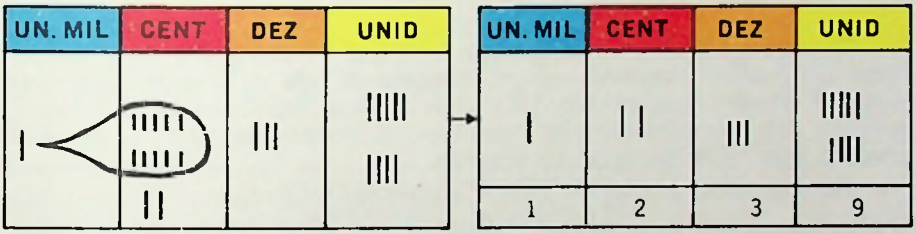
$$\begin{array}{r} 94 \\ +\ 37 \\ \hline 131 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 358 \\ 192 \\ +\ 689 \\ \hline 1.239 \end{array}$$







SUBTRAÇAO

Operação inversa da adição

Consideremos dois conjuntos A e B:

$A = \{1, 4, 5, 6\}$ $\qquad$ $B = \{2, 8\}$

A possui 4 elementos, logo $n(A) = 4$ e B possui 2 elementos, então $n(B) = 2$. Observamos que $A \cap B = \varnothing$. Unamos A e B.

$R = A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 2, 8\}$. O novo conjunto possui 6 elementos: $n(R) = 6$.

Associamos ao par (4, 2), formado pelo número de elementos dos conjuntos dados, o número de elementos do conjunto-reunião, isto é, 6.

Como sabemos $4 + 2 = 6$. Vemos que:

— 4 é o número que se deve adicionar a 2, para obter 6.

— 2 é o número que se deve adicionar a 4, para obter 6.

Concluímos que 4 é a diferença entre 6 e 2.
2 é a diferença entre 6 e 4.

Deste modo introduzimos a operação da subtração:

$2 = 6 - 4$ Temos então dois números: 6 e 4, sendo 6 maior que 4. Esta operação tem por fim determinar um outro número, que no exemplo é 2, e que, adicionado a 4, vai reproduzir o 1.º elemento, o 6.

Então dados dois números c e b, numa certa ordem, sendo o primeiro maior ou igual ao segundo, chama-se subtração a operação que tem por fim determinar um terceiro número **a** que, adicionado a **b**, vai reproduzir o número **c**.

$$c - b = a \quad \text{então} \quad a + b = c$$

c e **b** são os termos da subtração; **c** é o **minuendo** e **b** é o **subtraendo**

a é o resultado da operação e se denomina **diferença** ou **resto**.

Observando $6 - 2 = 4$ e $4 + 2 = 6$, vemos que 4 é o único número natural que adicionado a 2 resulta 6.

Logo $6 - 2 = 4$ porque $4 + 2 = 6$ e, por isso, a subtração é considerada **operação inversa da adição.**

Observemos a seguinte subtração: $3 - 5 =$? Posso tirar o maior número do menor? Notamos que no conjunto N não é possível encontrar nenhum número que adicionado a 5 dê 3. Logo, nem sempre é possível subtrair dois números naturais quaisquer. É necessário que o primeiro número seja maior ou igual ao segundo.

Podemos dizer que, no conjunto N, a operação subtração:

— não possui propriedade comutativa, pois a ordem dos termos influi no resultado. Por exemplo: $5 - 3 = 2$ e $3 - 5 =$?

— não possui elemento neutro, porque $5 - 0 = 5$ e não há resultado para $0 - 5$.

Equivalência entre a adição e a subtração

Já sabemos que a operação subtração é inversa da operação adição. Por exemplo:

$$6 - 5 = 1 \Longleftrightarrow 1 + 5 = 6.$$

onde $\Longleftrightarrow$ indica a equivalência entre as igualdades acima, que lemos "seis menos cinco igual a um **equivale** a um mais cinco igual a seis". O simbolo $\Longleftrightarrow$ indica: se $6 - 5 = 1$ então $1 + 5 = 6$ e
se $1 + 5 = 6$ então $6 - 5 = 1$

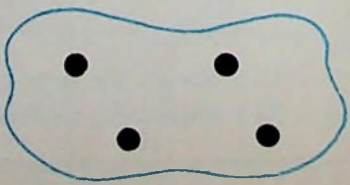
minuendo — subtraendo = diferença

e

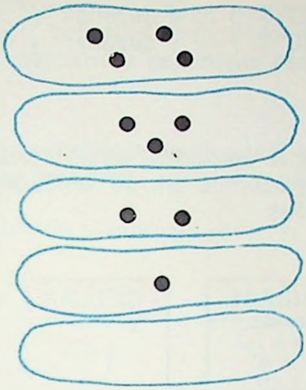
diferença + subtraendo = minuendo.

Técnicas de cálculo

Formemos um conjunto de 4 elementos. Vamos retirar desse conjunto todos os subconjuntos possíveis.



Vamos verificar quantos elementos faltam em cada subconjunto formado, para se obter um conjunto com 4 elementos.



Neste caso, não falta nenhum elemento:
$4 - 4 = 0 \Longleftrightarrow 0 + 4 = 4$

Neste caso, falta apenas um elemento:
$4 - 3 = 1 \Longleftrightarrow 1 + 3 = 4$

Neste caso, faltam dois elementos:
$4 - 2 = 2 \Longleftrightarrow 2 + 2 = 4$

Neste caso, faltam três elementos:
$4 - 1 = 3 \Longleftrightarrow 3 + 1 = 4$

Neste caso, faltam quatro elementos:
$4 - 0 = 4 \Longleftrightarrow 4 + 0 = 4$

O que fizemos para um conjunto de 4 elementos, podemos fazer para conjuntos de 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 ou mais elementos.

Realizemos as seguintes subtrações:

→ $8 - 3 = 5 \Longleftrightarrow 5 + 3 = 8$

$$\begin{array}{r} 8 \\ -\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$$ porque

→

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\ 8 \\ \hline 17 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
//	/////

$25 = 20 + 5 = 2$ dezenas $+ 5$ unidades.

Vemos que é impossível retirar 8 unidades de 5 unidades: podemos então, tomar, do conjunto das dezenas, uma dezena e reagrupá-la em 10 unidades, logo 25 se transforma em 1 dezena e 15 unidades.

Retiremos, agora, as 8 unidades das 15 unidades, observamos que restam 7 unidades na ordem das unidades.

<table>
<tr><th>DEZENA</th><th>UNIDADE</th></tr>
<tr><td>/</td><td>////
////
////
///</td></tr>
</table>

→

<table>
<tr><th>DEZENA</th><th>UNIDADE</th></tr>
<tr><td>|</td><td>|||||
||</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td></tr>
</table>

A diferença entre 25 e 8 é, portanto, 17

$$\begin{array}{r} 43 \\ -\ 17 \\ \hline 26 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
////	///

43 = 40 + 3 = 4 dezenas + 3 unidades
17 = 10 + 7 = 1 dezena + 7 unidades

Não podemos retirar 7 unidades de 3 unidades, então tomamos uma dezena do conjunto das dezenas e reagrupamos em 10 unidades, logo 43 se transforma em 3 dezenas e 13 unidades.

Retiremos as 7 unidades das 13 unidades e depois 1 dezena de 3 dezenas. Restam, portanto, 2 dezenas e 6 unidades.

DEZENA	UNIDADE
///	//// //// //// /

DEZENA	UNIDADE
//	/// ///
2	6

$$\begin{array}{r} 906 \\ -\ 247 \\ \hline 659 \end{array}$$

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
///// ////		///// /

906 = 900 + 6 = 9 centenas + 6 unidades
247 = 200 + 40 + 7 = 2 centenas + 4 dezenas + 7 unidades

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
///// ///	///// /////	///// /

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
//// ///	///// ////	///// ///// ///// /

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
/// ///	/// //	//// /////
6	5	9

SENTENÇAS MATEMÁTICAS

Quando dizemos: "Manaus é capital do Amazonas", estamos exprimindo um pensamento completo, que é uma **sentença**.

Se quisermos falar que "dois mais cinco é igual a sete", estamos usando uma sentença. Podemos usar símbolos matemáticos para escrevê-la, teremos, então, uma sentença matemática: $2 + 5 = 7$.

Uma sentença pode ser **verdadeira** ou **falsa.**

Por exemplo:

$3 = 1 + 2$ é uma sentença verdadeira
$8 = 2 + 4$ é uma sentença falsa, pois $2 + 4 = 6$ e $8 \neq 6$

Tendo a seguinte sentença:

□ = 2 + 6, não podemos saber se esta sentença é verdadeira ou falsa, pois se substituirmos □ por 7, temos uma sentença falsa; e se, nesta mesma sentença, substituirmos □ por 8, temos uma sentença verdadeira. Estas sentenças chamam-se **sentenças abertas.**

Quando substituímos □ por 8, estamos transformando a sentença aberta em **sentença fechada.**

Exemplos de sentenças abertas:

$x + 3 = 4$, $a < 3$, $x - 2 < 5$, $y = 8$, $5 + \square = 12$

Exemplos de sentenças fechadas:

$2 + 2 = 4$, $5 > 1$, $2 + 3 < 9$

Problemas de nossas vidas podem ser expressos através de sentenças matemáticas. Elas serão de grande ajuda para o nosso dia-a-dia.

Alguns exemplos:

Na adição

1) Comprei 2 camisas; depois comprei mais 3. Quantas camisas comprei ao todo?

Sentença matemática: $2 + 3 = \square$

Vemos que 5 é o único número natural, que torna a sentença verdadeira

$$2 + 3 = 5$$
$$\square = 5$$

R.: Comprei ao todo 5 camisas.

2) Adicionando-se 4 a um certo número, encontra-se 10. Qual é esse número?

Procuraremos o número que somado a 4 dá como resultado 10. Como não sabemos qual é esse número, ao escrevermos a sentença matemática podemos chamá-lo de **x.**

$$4 + x = 10$$

Vemos que 6 é o único número natural que torna a sentença verdadeira

$$4 + 6 = 10 \quad \text{logo} \quad x = 6$$

R.: 6 é o número procurado.

Ou ainda:

Sentença matemática: $4 + x = 10$

Pela propriedade comutativa: $x + 4 = 10$

Sabendo que a operação inversa da adição é a subtração:

$$x + 4 = 10 \Longleftrightarrow x = 10 - 4 \quad \text{logo: } x = 6$$

3) No sábado, ganhei um certo número de rosas, no domingo ganhei mais 5. Ao todo, ganhei 13 rosas. Quantas rosas ganhei no sábado?

Como não sabemos quantas rosas foram ganhas no sábado, chamaremos essa quantidade de $\square$.

$$\square + 5 = 13 \Longleftrightarrow 13 - 5 = \square$$

$$\square = 8$$

R.: Ganhei 8 rosas no sábado.

Na subtração

1) Comprei 9 livros. Dei 5. Com quantos fiquei?

Sentença matemática: $9 - 5 = \square$

Vemos que 4 é o único número natural, que torna a sentença verdadeira.

$$9 - 5 = 4 \quad \text{logo: } \square = 4$$

R.: Fiquei com 4 livros.

---

2) A diferença de um certo número e 5 é 6. Qual é esse número?

$$x - 5 = 6$$

$$x - 5 = 6 \Longleftrightarrow 6 + 5 = x$$

$$11 = x$$

R.: O número é 11, pois a adição é a operação inversa da subtração.

---

3) Pedro nasceu em 1941. Que idade terá em 1974?

$\square$ = idade que terá em 1974

$$1941 + \square = 1974$$

Aplicando a operação inversa:

$$\square = 1974 - 1941$$

$$\square = 33$$

R.: Em 1974 Pedro terá 33 anos.

Na adição e subtração

1) Ganhei 20 canetas. Dei 6 para um irmão e 3 para um colega. Com quantas canetas fiquei?

$$20 - (6 + 3) = \square$$

$$20 - 9 = \square$$

$$11 = \square$$

R.: Fiquei com 11 canetas.

2) Numa granja, com 2 galinheiros, havia 132 galinhas num dos galinheiros. No outro havia 40, mas 18 foram vendidas. Quantas galinhas restaram na granja?

$$132 + (40 - 18) = \square$$
$$132 + 22 = \square$$
$$154 = \square$$

R.: Restaram na granja 154 galinhas.

---

3) Nesta granja colhemos 89 ovos no primeiro galinheiro e 16 no segundo. Deste total foram vendidos alguns ovos, restando 68. Quantos ovos foram vendidos?

$$(89 + 16) - \square = 68$$
$$105 - \square = 68$$
$$105 = 68 + \square$$
$$105 - 68 = \square$$
$$37 = \square$$

R.: Foram vendidos 37 ovos.

---

4) A sala de aula do MOBRAL possuía um determinado número de alunos. A seguir, entraram 10 alunos, provenientes de outro município, e saíram 8. No final, a sala possuía 18 alunos. Quantos alunos havia no início?

$$(\square + 10) - 8 = 18$$
$$(\square + 10) = 18 + 8$$
$$\square + 10 = 26$$
$$\square = 26 - 10$$
$$\square = 16$$

R.: Havia no início 16 alunos.

---

5) Comprei 15 livros. Dei alguns para um amigo e depois ganhei 3. Fiquei com um total de 13 livros. Quantos dei para o amigo?

$$(15 - \square) + 3 = 13$$
$$(15 - \square) = 13 - 3$$
$$15 - \square = 10$$
$$15 = 10 + \square$$
$$15 - 10 = \square$$
$$\square = 5$$

R.: Dei 5 livros.

MULTIPLICAÇAO

Conceito da operação

Consideremos 2 conjuntos A e B

$A = \{a, b\}$ $\qquad$ $B = \{1, 2, 3\}$

Verificamos que A possui 2 elementos, logo $n(A) = 2$ e que B possui 3 elementos, logo $n(B) = 3$.

Se efetuarmos o produto cartesiano de A por B, teremos:

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

O produto cartesiano tem 6 pares ordenados, 6 elementos: $n(A \times B) = 6$

Através deste procedimento podemos associar ao par (2,3) de números naturais, formado pelo número de elementos dos conjuntos A e B respectivamente, o número natural 6 que é o número de elementos de $A \times B$

$$\begin{array}{ccc} n(A), & n(B), & n(A \times B) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 6 \end{array}$$

Esta comparação introduz a operação multiplicação de 2 por 3. Dizemos que 6 é o produto dos fatores 2 e 3 e escrevemos:

$$\underbrace{2 \times 3}_{\text{fatores}} = \underbrace{6}_{\text{produto}}.$$

Se tomarmos outros dois conjuntos quaisquer e seguirmos as mesmas etapas teremos:

$C = \{x\}$ $\qquad$ $n(C) = 1$

$D = \{x, y, z\}$ $\qquad$ $n(D) = 3$

$C \times D = \{(x, x), (x, y), (x, z)\}$ $\qquad$ $n(C \times D) = 3$

$(1, 3) \longrightarrow 1 \times 3 = 3$

PROPRIEDADES ESTRUTURAIS

Comutativa

Consideremos dois conjuntos:

$F = \{1, 3, 5\}$ $\qquad$ $a = n(F) = 3$

$G = \{2, 4\}$ $\qquad$ $b = n(G) = 2$

Efetuando $F \times G$ e $G \times F$

$F \times G = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

$G \times F = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$

Verificamos que $F \times G \neq G \times F$, mas que $n(F \times G) = n(G \times F)$.

Pela conceituação de multiplicação, temos:

$$a \times b = n(F) \times n(G) = n(F \times G)$$
$$3 \times 2 = 6$$

$$b \times a = n(G) \times n(F) = n(G \times F)$$
$$2 \times 3 = 6$$

$3 \times 2 = 6$ $2 \times 3 = 6$	$3 \times 2 = 2 \times 3$

Generalizando, teremos:

> Para todo $a \in N$ e $b \in N$,
> temos: $a \times b = b \times a$

E concluiremos que "a ordem dos fatores não altera o produto".

NOTA: Muitas vezes em lugar de escrevermos $a \times b$, podemos escrever $a.b$, isto é, em vez de $\times$ usamos **ponto.**

Elemento neutro

Tomemos dois conjuntos, sendo um deles unitário:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$ $\quad n(A) = 5$

$B = \{7\}$ $\quad n(B) = 1$

Efetuemos $A \times B$ e $B \times A$

$A \times B = \{(1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (5,7)\}$

$B \times A = \{(7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5)\}$

Pela conceituação de multiplicação temos:

$$5 \cdot 1 = n(A) \times n(B) = n(A \times B)$$
$$5 \times 1 = 5$$

$$1 \cdot 5 = n(B) \times n(A) = n(B \times A)$$
$$1 \times 5 = 5$$

$5 \times 1 = 5$ $1 \times 5 = 5$	$5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$

Podemos, pois, generalizar:

> Para todo $a \in N$ e $1 \in N$,
> temos: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

E concluir que: "Um (1) é o elemento neutro da multiplicação, pois multiplicado por qualquer número, reproduz este número."

Associativa

Consideremos três conjuntos:

$A = \{1, 2\}$ $\quad$ $B = \{m, n, p\}$ $\quad$ $C = \{a, e, i, u\}$

Se efetuarmos o produto cartesiano entre estes três conjuntos verificaremos que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Na multiplicação teremos:

$a = n(A)$ $\qquad$ $a = 2$

$b = n(B)$ $\qquad$ $b = 3$

$c = n(C)$ $\qquad$ $c = 4$

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$

Poderemos, então, generalizar:

Para todo $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$
temos: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

E concluir: "Numa multiplicação de três ou mais fatores, sempre se pode substituir dois (ou mais) destes fatores pelo seu produto."

Distributiva (em relação à adição e à subtração)

Relacionando a adição e a multiplicação podemos obter uma outra propriedade da multiplicação.

m	m	r	r	r
m	m	r	r	r
m	m	r	r	r

O quadro ao lado retrata uma sala de aula com moças e rapazes. Podemos contá-los de várias maneiras:

Em cada fila temos 2 moças e 3 rapazes: $(2 + 3)$ pessoas

Como são 3 filas, teremos: $(2 + 3) \cdot 3$

Temos 2 colunas de 3 moças (2×3) e 3 colunas de 3 rapazes (3×3)
Ao todo: $(2 \times 3) + (3 \times 3)$
Como, de qualquer maneira, o número de pessoas é o mesmo, teremos:

$$(2 + 3) \cdot 3 = (2 \times 3) + (3 \times 3)$$

Generalizando:

Para todo $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$
temos: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Concluindo: "Para se multiplicar uma soma indicada por um número, pode-se multiplicar o número pelos termos da soma e adicionar os produtos obtidos."

O mesmo fato ocorre para a subtração. Ex.:

$$(3 - 2) \cdot 4 = (3 \times 4) - (2 \times 4)$$
$$1 \cdot 4 = 12 - 8$$
$$4 = 4$$

Do mesmo modo que distribuímos (pela adição ou pela subtração) à direita podemos também distribuir à esquerda. Assim sendo:

$$4 \cdot (3 + 2) = (4 \times 3) + (4 \times 2)$$
$$4 \cdot (3 - 2) = (4 \times 3) - (4 \times 2)$$

Generalizando:

Para todo $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$

temos: $c \cdot (a + b) = (c \times a) + (c \times b)$

ou também $c \cdot (a - b) = (c \times a) - (c \times b)$

O zero e a multiplicação

Consideremos dois conjuntos, sendo um deles vazio:

$A = \{o, e, i\}$ e $B = \emptyset$

Efetuemos $A \times \emptyset$ e $\emptyset \times A$.

Quando efetuamos o produto cartesiano entre 2 conjuntos, formamos pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem ao primeiro conjunto e os segundos elementos pertencem ao segundo conjunto.

Como o nosso segundo conjunto é vazio e não possui elementos, não podemos formar pares ordenados.

Daí termos como resultado um conjunto vazio. Logo, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

Teremos então:

$a = n(A)$	$n(B) = n(\emptyset)$
$a = 3$	$n(B) = 0$

$$a \cdot 0 = n(A) \times n(\emptyset)$$
$$3 \times 0 = 0$$

$$0 \cdot a = n(\emptyset) \times n(A) = n(\emptyset \times A)$$
$$0 \times 3 = 0$$

$3 \times 0 = 0$ $0 \times 3 = 0$	$3 \times 0 = 0 \times 3 = 0$

Podemos, então, concluir que: "Qualquer número multiplicado por zero é igual ao próprio zero."

Técnicas de cálculo

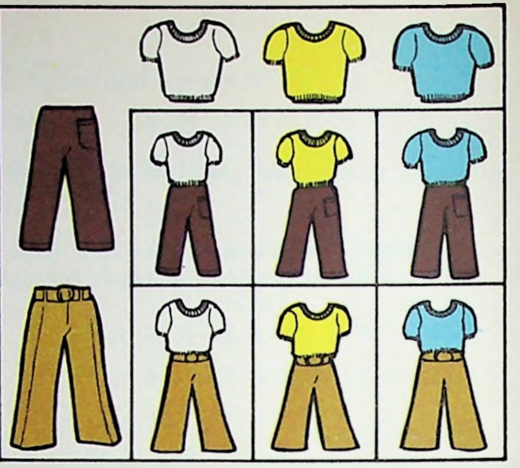
Tomemos 2 conjuntos já vistos:

A = { rancheira, social }

conjunto de calças.

B = { branca, amarela, azul }

conjunto de camisas



Se você tiver estas 2 calças e as três camisas, poderá se vestir de 6 maneiras diferentes.

Voltando aos conjuntos A e B, temos:

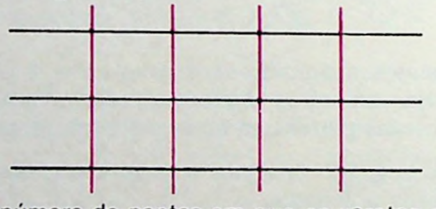
$n(A) = 2$ $\quad$ $n(A \times B) = 6$

$n(B) = 3$

Dizemos, então, que o produto de 2 e 3 é 6, indicando: $2 \times 3 = 6$.

Imaginemos outros 2 conjuntos de varetas (pretas e vermelhas).

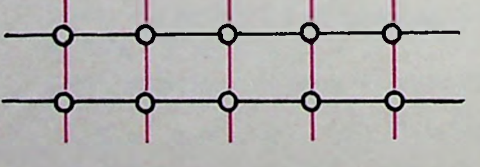
Vamos dispor 3 varetas pretas horizontalmente e 4 vermelhas, verticalmente, como aparece na figura abaixo:



Determinemos o número de pontos em que as varetas se cruzam. Há 12 pontos de cruzamento, por isso dizemos que o produto de 3 por 4 é 12 e indicamos: $3 \times 4 = 12$.

O professor poderá levar o aluno a trabalhar com conjuntos diversos. Ex.:

Querendo efetuar a multiplicação entre 2 e 5 o professor pode levar os alunos a disporem novamente as varetas do exemplo anterior:



$2 \times 5 = 10$

(foram encontrados 10 pontos de cruzamento)

Todos os fatos fundamentais poderão ser vistos deste modo. O professor deve lembrar, ao fixar estes fatos, a propriedade comutativa onde

$2 \times 3 = 3 \times 2$, $\quad 3 \times 4 = 4 \times 3 \quad$ e $\quad 2 \times 5 = 5 \times 2$.

Ampliando o estudo da multiplicação, podemos efetuar da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ \underline{\ \ 2} \\ 42 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I I	I
I I	I
4	2

Utilizando as casas de numeração vamos multiplicar 21 por 2.

Colocamos na 1.ª ordem as unidades da ordem das unidades do 1.º número e na 2.ª ordem as dezenas da ordem das dezenas do 1.º número (21).

O 2.º número indica quantas vezes repetimos as unidades e as dezenas do 1.º número.

Assim teremos como total 42.

Outros exemplos:

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times\ \underline{\ \ 3} \\ 99 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I I I	I I I
I I I	I I I
I I I	I I I
9	9

$33 \times 3 = 99$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times\ \underline{\ \ 2} \\ 80 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
I I I I	
I I I I	
8	0

$40 \times 2 = 80$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times\ \underline{\ \ \ 2} \\ 482 \end{array}$$

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I I	I I I I	I
I I	I I I I	I
4	8	2

$241 \times 2 = 482$

$$\begin{array}{r} 302 \\ \times\ \underline{\ \ \ 2} \\ 604 \end{array}$$

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I I I		I I
I I I		I I
6	0	4

$302 \times 2 = 604$

Vejamos, agora, a seguinte multiplicação:

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 3 \\ \hline 156 \end{array}$$

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
/	///// ///// /////	// // //
1	5	6

Depois de repetidas três vezes as unidades de 1.ª e 2.ª ordem do número 52, observamos que, na casa das dezenas, obtivemos 15 dezenas.

Sabendo que 10 dezenas formam 1 centena, colocamos as 10 dezenas grupadas na ordem das centenas restando 5 dezenas na ordem das dezenas.

$52 \times 3 = 156$

$$\begin{array}{r} 376 \\ \times\ 3 \\ \hline 1.128 \end{array}$$

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
1	1	2	8

$$\begin{array}{r} 405 \\ \times\ 6 \\ \hline 2.430 \end{array}$$

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
2	4	3	0

Os casos de multiplicação por 10 serão explorados através de vários exemplos e generalizados pelos alunos.

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 2 \\ \hline 20 \end{array}$$

DEZENA	UNIDADE
| |	
2	0

Da mesma maneira:

$3 \times 10 = 30$
$4 \times 10 = 40$
. . .
. . .
. . .
$10 \times 10 = 100$
$11 \times 10 = 110$
$127 \times 10 = 1.270$
etc.

Os alunos chegarão a generalizar que qualquer número multiplicado por 10 é igual ao próprio número seguido do zero e, mais tarde, qualquer número multiplicado por 100, 1000. . . é igual ao próprio número seguido de 2 zeros, 3 zeros respectivamente.

Por exemplo:

$74 \times 100 = 7.400$
$3 \times 1.000 = 3.000$
$20 \times 100 = 2.000$

Os casos de multiplicação de um número natural qualquer por outro de 2 algarismos são resolvidos de acordo com a propriedade distributiva da multiplicação:

$$
\begin{aligned}
32 \times 13 &= 32.(10 + 3) \\
&= (32 \times 10) + (32 \times 3) \\
&= 320 + 96 \\
&= 416
\end{aligned}
$$

Efetuando de outra maneira, o aluno poderá perceber a colocação dos produtos parciais:

```
   32
×  13
 ----
   96   →   3 × 32
+ 320   →  10 × 32
 ----
  416   →  13 × 32
```

```
   32
×  13
 ----
   96
  32    → 320 = 32 dezenas
 ----
  416
```

Outros exemplos:

```
   143
 ×  53
 -----
   429   →   3 × 143
  715    →  50 × 143 = 715 dezenas
 -----
 7.579   →  53 × 143
```

```
    143
 ×  232
 ------
    286   →    2 × 143
   429    →   30 × 143 = 429 dezenas
  286     →  200 × 143 = 286 centenas
 ------
 33.176   →  232 × 143
```

```
     623
 ×   320
 -------
  12.460   →   20 × 623
 1.86 9    →  300 × 623
 -------
 199.360   →  320 × 623
```

Como 320 = 300 + 20, nós vamos multiplicar 623 por 20 e por 300, adicionando os produtos parciais.

320 não possui unidades na ordem das unidades e o produto parcial correspondente à multiplicação pelas unidades não aparecerá sendo representado pelo zero.

```
    2.060
 ×    250
 --------
  103.000   →   50 × 2.060
 412 0      →  200 × 2.060
 --------
  515.000   →  250 × 2.060
```

```
     413
 ×   601
 -------
     413   →    1 × 413
  247.80   →  600 × 413
 -------
 248.213   →  601 × 413
```

POTENCIAÇÃO

Observemos as multiplicações abaixo:

$(2,3) \longrightarrow 2 \times 2 \times 2$
$(4,2) \longrightarrow 4 \times 4$

Notamos que os produtos acima são formados por fatores iguais, pois:

- ao par (2,3) associamos $2 \times 2 \times 2 = 8 \longrightarrow$ um produto de 3 fatores iguais a dois.
- ao par (4,2) associamos $4 \times 4 = 16 \longrightarrow$ um produto de 2 fatores iguais a quatro

Dizemos que:

- 8 é a potência de base 2 e expoente 3 e indicamos: $2^3 = 8$ (lê-se: dois ao cubo é igual a 8).
- 16 é a potência de base 4 e expoente 2 e indicamos: $4^2 = 16$ (lê-se: quatro ao quadrado é igual a 16).

Exemplo:

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Então: $2^4 = 16$ (lê-se: dois à quarta potência é igual a 16).

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

Então: $3^5 = 243$ (lê-se: três à quinta potência é igual a 243).

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

Então: $5^2 = 25$

Na igualdade acima, a operação indicada é **potenciação** e ao resultado da operação (25, no exemplo dado) chamamos de **potência.**

Observemos os exemplos:

1.º — $(2,1) \longrightarrow 2^1 \longrightarrow 2$
$(8,1) \longrightarrow 8^1 \longrightarrow 8$

O primeiro produto é formado por apenas um fator. O mesmo acontece com o segundo produto.

Toda vez que tivermos uma potência com expoente 1, o resultado será a própria base: $32^1 = 32$

2.º — $(1,3) \longrightarrow 1 \times 1 \times 1 = 1 \longrightarrow 1^3$
$(1,6) \longrightarrow 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \longrightarrow 1^6$
$(1,1) \longrightarrow 1 = 1 \longrightarrow 1^1$

Toda vez que tivermos uma potência com base 1, o resultado será o próprio 1.

3.º — $(0,4) \longrightarrow 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0 \longrightarrow 0^4$
$(0,5) \longrightarrow 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0 \longrightarrow 0^5$

Toda vez que tivermos uma potência com base zero e expoente diferente de zero, o resultado será zero.

NOTA: • Qualquer número diferente de zero, elevado a zero dá como resultado 1.

$5^0 = 1$
$10^0 = 1$

• Por enquanto 0^0 para nós não terá sentido.

4.º — $(10,1) \longrightarrow 10 \longrightarrow 10^1$

$(10,2) \longrightarrow 10 \times 10 = 100 \longrightarrow 10^2$

$(10,3) \longrightarrow 10 \times 10 \times 10 = 1000 \longrightarrow 10^3$

$(10,7) \longrightarrow 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000.000 \longrightarrow 10^7$

$$(10,n) \longrightarrow \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{1.000\dots0}_{n \text{ zeros}} \longrightarrow 10^n$$

ATENÇÃO: O professor deve levar o aluno a perceber a correspondência entre potências de base 10 e a base do nosso Sistema de Numeração. Exemplo:

Base do Sistema 10

UN. MILHAR	CENTENA	DEZENA	UNIDADE
1.000 u	100 u	10 u	1
$10 \times 10 \times 10$ u	10×10 u	10 u	
10^3 u	10^2 u	10^1 u	10^0

Cada elemento na ordem das unidades vale 1 unidade: 1.ª ordem unidades $\longrightarrow 10^0 = 1$

Cada elemento na ordem das dezenas vale 10 unidades ou 1 dezena: 2.ª ordem $\longrightarrow$ dezenas $\longrightarrow 10^1 = 10$

Cada elemento na ordem das centenas vale 100 unidades ou 10 dezenas ou 1 centena: 3.ª ordem $\longrightarrow$ centenas $\longrightarrow 10^2 = 10 \times 10 = 100$

E assim por diante.

O professor poderá chamar atenção do aluno, através de exercícios variados, a respeito dos seguintes fatos:

1 — A operação que associa a cada par ordenado de números naturais, com um elemento pelo menos, diferente de zero (sendo o primeiro **base** e o segundo **expoente**), um terceiro número natural, chamado **potência** do primeiro, é denominada **potenciação.**

expoente (número de fatores iguais)

$(6,2) \longrightarrow 6^2 = 36$

potência.

base (fator que se repete)

2 — Toda potência indicada de **expoente 1** terá como resultado a própria base.

$6^1 = 6$

3 — Toda potência indicada de **base 1** terá como resultado o próprio 1.

$1^6 = 1$

4 — Toda potência indicada de **base zero e expoente diferente de zero** terá como resultado o próprio zero.

$0^3 = 0$

5 — Toda potência indicada de **expoente zero e base diferente de zero** terá como resultado 1.

DIVISÃO

Operação inversa da multiplicação

Consideremos dois conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $n(A) = 4$

$B = \{x, y\}$ $\qquad$ $n(B) = 2$

Efetuando o produto cartesiano de A por B, teremos:

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y), (4,x), (4,y)\}$$

$$n(A \times B) = 8$$

$$4 \times 2 = 8$$

Observamos que:

4 é o número que se deve multiplicar por 2, para se obter 8
2 é o número que se deve multiplicar por 4, para se obter 8

E concluímos: 4 é o quociente de 8 por 2
2 é o quociente de 8 por 4

Deste modo introduzimos a operação de divisão:

$8 \div 2 = 4$ porque $2 \times 4 = 8$
$8 \div 4 = 2$ porque $4 \times 2 = 8$

Dados os números 8 e 2, podemos encontrar o 4. Este número 4 encontrado é aquele que multiplicado pelo segundo, isto é, o 2, dá como resultado o primeiro, que é 8.

Dados dois números naturais a e **b**, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a operação que permite encontrar um terceiro número natural **c** que, multiplicado pelo segundo dê para resultado o primeiro, é chamada divisão (exata).

$a \div b = c$ $\qquad$ pois $c \times b = a$

a é o dividendo $\qquad$ b é o divisor $\qquad$ c é o quociente

Observando $8 \div 2 = 4$ e $4 \times 2 = 8$ vemos que 4 é o único número natural que, multiplicado por 2, resulta 8. Logo:

$8 \div 2 = 4$ porque $4 \times 2 = 8$ e por isso a **divisão** é considerada **operação inversa da multiplicação.**

Podemos ter $5 \div 7$? Não é possível encontrar no conjunto N nenhum número que, multiplicado por 7, dê 5.

Podemos ter $20 \div 7$? Da mesma maneira, não encontramos no conjunto N nenhum número que, multiplicado por 7, dê 20.

Generalizando, vemos que nem sempre é possível dividir dois números naturais quaisquer.

NOTA A divisão não possui as propriedades estruturais: comutativa, associativa, elemento neutro e distributiva.

Verifiquemos:

Propriedade comutativa

Não possui a propriedade comutativa, pois a ordem dos termos influi no resultado da operação.

Por exemplo:

$6 \div 2 = 3$ e $2 \div 6 \neq 3$ $\qquad$ $6 \div 2 \neq 2 \div 6$

De modo geral $\boxed{a \div b \neq b \div a}$

ATENÇÃO: $a \div b = b \div a \Longleftrightarrow a = b$

Por exemplo: $4 \div 4 = 4 \div 4 \Longleftrightarrow 4 = 4$

O sinal $\Longleftrightarrow$ significa que temos as duas sentenças verdadeiras:

Se $4 \div 4 = 4 \div 4$ então $4 = 4$

e

Se $4 = 4$ então $4 \div 4 = 4 \div 4$

Propriedade associativa

Não possui a propriedade associativa, pois se associarmos os termos da divisão de maneiras diferentes não obteremos o mesmo resultado.

Exemplo:

Temos: $18 \div 6 \div 3$

$(18 \div 6) \div 3 = 3 \div 3 = 1$ e $18 \div (6 \div 3) = 18 \div 2 = 9$

Concluímos que: $(18 \div 6) \div 3 \neq 18 \div (6 \div 3)$

De modo geral:

$\boxed{(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)}$

Propriedade elemento neutro

A divisão não admite elemento neutro.

$9 \div 1 = 9$ e $1 \div 9 \neq 9$

Não se pode afirmar a existência de elemento neutro para a divisão, pois $9 \div 1 \neq 1 \div 9$ (a divisão não é comutativa).

Propriedade distributiva

Não possui a propriedade distributiva, pois na divisão essa propriedade não pode ser aplicada em dois sentidos.

Exemplos:

$$\longrightarrow \quad (4 + 2) \div 2 \qquad\qquad (4 \div 2) + (2 \div 2)$$

$$\underbrace{6 \div 2}_{3} \qquad\qquad \underbrace{2 + 1}_{3}$$

Logo: $(4 + 2) \div 2 = (4 \div 2) + (2 \div 2)$

$$\longrightarrow \quad (6 - 2) \div 2 \qquad\qquad (6 \div 2) - (2 \div 2)$$

$$\underbrace{4 \div 2}_{2} \qquad\qquad \underbrace{3 - 1}_{2}$$

Logo:

$(6 - 2) \div 2 = (6 \div 2) - (2 \div 2)$

O mesmo não acontece quando aplicada em outro sentido. Exemplo:

$$\longrightarrow \quad 36 \div (2 + 4) \qquad\qquad (36 \div 2) + (36 \div 4)$$

$$\underbrace{36 \div 6}_{6} \qquad\qquad \underbrace{18 + 9}_{27}$$

Logo:

$36 \div (2 + 4) \neq (36 \div 2) + (36 \div 4)$

$$\longrightarrow \quad 30 \div (5 - 2) \qquad\qquad (30 \div 5) - (30 \div 2)$$

$$30 \div 3 \qquad\qquad 6 - 15$$

$$10 \qquad\qquad ?$$

Logo:

$30 \div (5 - 2) \neq (30 \div 5) - (30 \div 2)$

Outros exemplos poderão ser apresentados e verificaremos, facilmente, que para se dividir uma soma indicada ou subtração por um número, pode-se dividir cada termo da adição ou subtração pelo número e adicionar ou subtrair os quocientes obtidos.

Como já vimos o mesmo não acontece ao dividirmos um número por uma soma indicada ou uma subtração.

O zero e a divisão

Observemos o que acontece quando usamos zero na divisão:

$0 \div 4 = 0$, pois $0 \times 4 = 0$

Logo: o quociente de zero por qualquer número natural diferente de zero é sempre zero.

Para todo $a \neq 0$:

$0 \div a = 0$ pois $0 \times a = 0$

E $4 \div 0 =$? Esta é uma operação impossível pois não encontramos nenhum número que, multiplicado por zero, dê como resultado 4.

$4 \div 0 = \square$ pois $\square \cdot 0 \neq 4$

A igualdade $\square \cdot 0 = 4$ é impossível, pois qualquer número multiplicado por zero é igual a zero.

Concluímos, então, que: **não é possível a divisão por zero**

Equivalência entre a multiplicação e a divisão

Já sabemos que a operação divisão é inversa da operação multiplicação.

Por exemplo:

$8 \div 2 = 4 \Longleftrightarrow 4 \times 2 = 8$

onde $\Longleftrightarrow$ indica a equivalência entre as igualdades acima.

Generalizando, temos para a divisão exata:

dividendo $\div$ divisor $=$ quociente $\Longleftrightarrow$ quociente X divisor $=$ dividendo.

A divisão não exata

$9 \div 4 = ?$

Neste exemplo de divisão não encontramos nenhum número natural que, multiplicado por 4, dê 9 exatamente.

Temos: $9 = 4 + 4 + 1$ ou

$9 = (4 \times 2) + 1$

De um modo geral escrevemos $D = d.q + r$, sendo **D** o dividendo, **d** o divisor, **q** o quociente e **r** o resto.

ATENÇÃO: Na divisão exata, o resto é sempre 0 (zero).

Outros exemplos:

→ $15 \div 4 =$

$15 = 4 + 4 + 4 + 3 = (4 \times 3) + 3$

$15 = (4 \times 3) + 3$

→ $38 \div 6 =$

$38 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 = (6 \times 6) + 2$

$38 = (6 \times 6) + 2$

Técnicas de cálculo

Outra maneira de efetuarmos a divisão $8 \div 2$ é:

$$\begin{array}{l|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array}$$

Na divisão não exata:

$$\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \quad \text{porque } 9 = (4 \times 2) + 1$$

Outros exemplos de divisão exata:

→ $36 \div 4 = 9$, resto 0

Ainda considerando o dividendo como um todo (fato fundamental).

→ 24 ÷ 2

DEZ	UNID
II	IIII
2	4

DEZ	UNID
I	II
I	II

24 ÷ 2 Para efetuar esta divisão simbolicamente, passamos pelas etapas:

24 ⌊2 → 1, resto 0

— Primeiramente dividimos as dezenas.
2 dezenas por 2 dão 1 dezena
1 X 2 = 2
Sobra zero
Diríamos: 1 X 2 =2 para 2, zero

24 ⌊2 → 12; 04; 0

— Depois dividimos as unidades.
4 unidades por 2 dão 2 unidades
2 X 2 = 4
Sobra zero
Diríamos: 2 X 2 = 4 para 4, zero

→ 369 ÷ 3

CENT	DEZ	UNID
III	IIIIII	IIIIIIIII
3	6	9

CENT	DEZ	UNID
I	II	III
I	II	III
I	II	III

369 ⌊3 → 123; 06; 09; 0

→ 128 ÷ 2

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
I	II	IIIIIIII
1	2	8

Quando dividirmos as centenas veremos que não temos centenas suficientes para dividir por 2. Podemos transformar a centena em 10 dezenas e levá-la para a ordem das dezenas.

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
	IIIII IIIII II	IIIII III

CENTENA	DEZENA	UNIDADE
	IIIIII	IIII
	IIIIII	IIII

Agora podemos efetuar a divisão da maneira já conhecida.

128 ⌊2 → 64; 08; 0

Outros exemplos de divisão não exata:

```
38 |4        353 |2        364 |3
 2  9        15   176      06   121
              13            04
               1             1
```

Exemplos com zero no quociente

- na divisão exata

```
525 |5
025  105
  0
```

Quando dividimos 5 centenas por 5, obtemos 1 centena. Ao dividirmos as 2 dezenas por 5 vemos que não é possível, então colocamos o zero no quociente para marcar o lugar de dezena que ainda não foi repartida. Como não podemos deixar de dividir as dezenas as reagruparemos em unidades, adicionando as unidades restantes.

```
4420 |2
04    2210
 02
  00
```

Neste caso, semelhante ao anterior, a dificuldade está na última divisão efetuada, levando ao hábito de terminar as operações.

- na divisão não exata

```
529 |5         4421 |2
029  105       04    2210
  4             02
                 01
```

Divisão por 10

Os casos de divisão por 10 poderão ser generalizados pelos alunos, através de vários exemplos:

Sabemos que:	E a divisão sendo a operação inversa da multiplicação, temos:
2 X 10 = 20	20 ÷ 10 = 2
3 X 10 = 30	30 ÷ 10 = 3
4 X 10 = 40	40 ÷ 10 = 4
. . .	. . .
. . .	. . .
. . .	. . .
10 X 10 = 100	100 ÷ 10 = 10
11 X 10 = 110	110 ÷ 10 = 11
127 X 10 = 1270	1270 ÷ 10 = 127

O próprio aluno deverá, depois de vários exemplos dados, elaborar generalizações que lhe permitirão cortar os zeros na divisão por 10 e, mais tarde, por 100, 1000, etc. Assim por exemplo:

$$32 \times 100 = 3200 \Longleftrightarrow 3200 \div 100 = 32$$
$$47 \times 1000 = 47000 \Longleftrightarrow 47000 \div 1000 = 47$$

Há casos de divisão em que o aluno tem dificuldade para encontrar o quociente. Ex.:

144 | 9
— —

— Começamos a divisão sempre pela ordem mais elevada (no caso: centenas).
— Temos 144 unidades para serem divididas em 9 unidades.
— Observamos que não temos centenas suficientes para serem divididas por 9.
— Vamos reagrupar a centena em dezenas e juntá-la às dezenas já existentes.
— Temos agora 14 dezenas para serem divididas por 9.
— Como vamos começar a divisão pela ordem das dezenas e sendo o divisor formado apenas pela ordem das unidades, o quociente será formado por 2 algarismos (dezenas e unidades).

1675 | 32
— —

— Não temos unidades de milhar suficientes para dividir.
— Reagrupamos em centenas, juntando as já existentes.
— Observamos que ainda não temos centenas suficientes para dividir.
— Novamente reagrupamos em dezenas, juntando às já existentes.
— Como vamos começar a dividir pela ordem das dezenas, o 1.º algarismo do quociente ocupará a ordem das dezenas.
— O quociente será formado por 2 algarismos (dezenas e unidades).

7543 | 24
— — —

4173 | 234
— —

2098 | 451
—

— Procurando levar o aluno a descobrir quantos algarismos terá o quociente, ele se sentirá mais seguro para efetuar divisões por números formados por 2 ou mais algarismos.

Divisão por números formados por 2 algarismos

$$\begin{array}{r|l} 60 & 20 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

— Ao fazer este tipo de divisão o aluno pode dividir 6 dezenas por 2 dezenas, encontrando, para quociente, 3.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 20 \\ \hline 12 & 1 \end{array}$$

— Quando o aluno efetua esta divisão, ele sabe que 32 é quase 30 e que 20 está uma vez em 30 e ainda sobra um resto.

Efetuando: uma vez 20 são vinte, para trinta e dois, 12 ou:

uma vez zero unidades, zero, para 2 unidades, 2; uma vez 2 dezenas, 2, para 3 dezenas, 1.

$$\begin{array}{r|l} 65 & 31 \\ \hline 03 & 2 \end{array}$$

— 65 é quase 60 e 31 é quase 30
— $60 \div 30 = 2$
— 2 vezes 1 unidade são 2 unidades, para 5 unidades, 3 unidades; 2 vezes 3 dezenas, são 6 dezenas, para 6 dezenas, zero.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 24 \\ \hline 00 & 3 \end{array}$$

— 72 é quase 70 e 24 é quase 20
— $70 \div 20 = 3$ e sobra resto
— 3 vezes 4 são 12, para 12, zero
* Neste caso há um **reagrupamento** de 72 em 6 dezenas e 12 unidades.
— 3 vezes 2 dezenas, são 6 dezenas, para 6 dezenas, zero.

$$\begin{array}{r|l} 94 & 42 \\ \hline 10 & 2 \end{array}$$

— 94 é quase 90 e 42 é quase 40
— $90 \div 40 = 2$ e sobra resto
— 2 vezes 2 unidades são 4 unidades, para 4 unidades, zero; 2 vezes 4 dezenas são 8 dezenas, para 9 dezenas, 1.

$$\begin{array}{r|l} 142 & 21 \\ \hline & \end{array}$$

— Para efetuar este tipo de divisão o aluno utiliza vários conhecimentos:

1.º) 142 é quase 140
21 é quase 20

2.º) O resultado de $140 \div 20$ é o mesmo que o resultado de:
$14 \div 2$

3.º) $14 \div 2 = 7$

Todo esse raciocínio é feito para que ele determine o 1.º algarismo do quociente. Feito isto, ele parte para a resolução da divisão:

— 7 vezes 1 unidade são 7 unidades, para 12 unidades *, 5 unidades; 7 vezes 2 dezenas, 14 dezenas, para 13 dezenas .... ?

142 | 21
16   6

— O aluno percebe, então, que não pode efetuar a divisão, pois para ter 7 no quociente, o dividendo deveria ser 147. Tenta, então, usar 6 no quociente e verifica que:

6 X 1u = 6u para 12u, 6u

6 X 2d = 12d para 13d, 1d

Vamos examinar todas as etapas que o aluno percorre para fazer esta divisão:

— 1.ª etapa — Determinar a ordem do 1.º algarismo do quociente:

O primeiro algarismo do quociente será o das centenas.

10332 | 36
— — —

— 2.ª etapa — Determinar qual o 1.º algarismo do quociente:

100c ÷ 30 = 3c e sobra resto

— 3.ª etapa — Multiplicar o 1.º algarismo encontrado pelo divisor e comparar o resultado com o dividendo:

36 X 3c = 108c

108c > 103c

Logo 3 não é o algarismo procurado. Tenta-se, então 1 centena abaixo ——— 2c

36 X 2c = 72c

72c < 103c

103c — 72c = 31c

10332 | 36
31   2

— 4.ª etapa — Reagrupar o resto e adicionar a ordem que vem em seguida:

31c = 310d

310d + 3d = 313d

— 5.ª etapa — Continuar a divisão com a ordem seguinte:

310 ÷ 30 = 10 e sobra resto

Como 10 é um número de dois algarismos, verifica-se que este número não nos serve pois, cada ordem só pode ser ocupada por um número de um algarismo.

Tenta-se, então, o 9

36 X 9d = 324d

324d > 313d

10332 | 36
313   28 —
25

Tenta-se o 8

36 X 8d = 288d

288d < 313d

313d — 288d = 25d

```
10332 | 36
 313    287
  252
   00
```

— 6.ª etapa — Continuar reagrupando até terminar a divisão:

25 = 250u

250u + 2u = 252u

250 ÷ 30 = 8 e sobra resto

36 X 8u = 288u

288u > 252u

36 X 7u = 252u

252u — 252u = 0

Seguindo sempre os mesmos passos o professor leva o aluno a efetuar divisões com divisor composto por 3 ou mais algarismos.

ATENÇÃO: Através de vários exemplos levar o aluno a ver que o resto é, obrigatoriamente, menor que o divisor.

SENTENÇAS MATEMATICAS

Na multiplicação

1) Um caderno com 100 páginas tem 32 linhas em cada página. Quantas linhas tem o caderno?

100 X 32 = □

3200 = □

R.: O caderno tem 3.200 linhas.

---

2) Consideremos os seguintes conjuntos: {Ana, Luíza} e {Paulo, Roberto, João}. Quantos pares podemos formar?

2 X 3 = □

6 = □

R.: Podemos formar 6 pares.

---

3) Uma vila possui 20 casas. Cada casa possui 4 quartos e cada quarto 2 camas. Quantas camas existem na vila?

(20 X 4) X 2 = □

80 X 2 = □

160 = □

R.: Existem na vila 160 camas.

Na divisão

1) Em uma divisão, o dividendo é 15 e o divisor 3. Qual é o quociente?

15 ÷ 3 = □

5 = □

R.: O quociente é 5.

2) João possui 80 sacas de café. Distribuiu-as por um determinado número de vendedores. Cada um recebe 20 sacas. Quantos são os vendedores?

$$80 \div 20 = \square$$

$\square$ = quantidade de vendedores

$$80 \div 20 = 4$$

$$\square = 4$$

R.: São 4 vendedores.

3) O MOBRAL distribuiu 80 livros a 20 supervisores. Cada supervisor redistribuiu o que ganhou por 2 alunos. Quantos livros recebeu cada aluno?

$$(80 \div 20) \div 2 = \square$$

$$4 \div 2 = \square$$

$$2 = \square$$

$$\square = 2$$

R.: Cada aluno recebeu 2 livros.

Na multiplicação e divisão

1) Numa região há 15 municípios. Cada município tem 4 escolas. Estas ficarão sob a responsabilidade de 20 supervisores. Quantas escolas caberão a cada supervisor?

$$(15 \times 4) \div 20 = \square$$

$$60 \div 20 = \square$$

$$3 = \square$$

R.: A cada supervisor caberão 3 escolas.

2) Em uma multiplicação de dois fatores, um deles é 6 e o produto é 30. Qual é o outro fator?

$$6 \times \square = 30$$

$$\square \times 6 = 30$$

$$\square = 30 \div 6$$

$$\square = 5$$

R.: O outro fator é 5.

3) Temos 800 vacinas para distribuir pelos 2 postos de cada uma das 5 cidades do nosso município. Quantas vacinas caberão a cada posto?

$$800 \div (2 \times 5) = \square$$

$$800 \div 10 = \square$$

$$80 = \square$$

R.: Cada posto ficará com 80 vacinas.

4) Temos 4 qualidades de balas para distribuir por um determinado número de crianças. De cada qualidade, temos 33 balas. Ao todo cada criança receberá 44 balas. Quantas são as crianças?

$44 \times \square = (4 \times 33)$

$44 \times \square = 132$

$\square \times 44 = 132$

Aplicando a operação inversa:

$\square = 132 \div 44$

$\square = 3$

R.: São 3 crianças.

---

5) Duas fábricas forneceram 105 carteiras cada uma. Estas carteiras serão colocadas nas 7 salas de cada uma das 3 escolas de nossa cidade. Quantas carteiras ficarão em cada sala de aula?

$(105 \times 2) \div (7 \times 3) = \square$

$210 \div 21 = \square$

$10 = \square$

R.: Em cada sala de aula ficarão 10 carteiras.

Na adição, subtração, multiplicação e divisão.

1) José tem dois irmãos. Recebeu de cada um 5 livros. Depois, comprou mais 8. Com quantos livros ficou?

$(2 \times 5) + 8 = \square$

$10 + 8 = \square$

$18 = \square$

R.: Ficou com 18 livros.

---

2) Numa granja, a produção diária de um galinheiro foi 45 ovos, e de outro galinheiro maior, 135 ovos. O total foi comprado por 5 pessoas em partes iguais. Quantos ovos levou cada pessoa?

$(45 + 135) \div 5 = \square$

$180 \div 5 = \square$

$36 = \square$

R.: Cada pessoa levou 36 ovos.

---

3) Helena possuía 15 tipos de sementes. Deu 3 tipos para cada uma de suas 2 vizinhas. Com quantos tipos de sementes ficou?

$15 - (3 \times 2) = \square$

$15 - 6 = \square$

$9 = \square$

R.: Ficou com 9 tipos de sementes.

4) Duas fábricas forneceram 200 carteiras cada uma, para duas escolas. A primeira escola tem 11 salas e a segunda escola 9 salas. Quantas carteiras ficaram em cada sala?

$$(200 \times 2) \div (11 + 9) = \square$$
$$400 \div 20 = \square$$
$$20 = \square$$

R.: Ficaram em cada sala 20 carteiras.

OBSERVAÇÃO: Você já sabe transformar uma situação problemática em sentença matemática e resolver a sentença. Agora resolveremos diretamente toda e qualquer expressão numérica.

A ordem que você deve seguir nas expressões não "pontuadas" é:

1.º) multiplicações e divisões
2.º) adições e subtrações

Chamamos de "pontuação" aos parênteses, colchetes, chaves, que você encontra nas expressões. Neste caso, a ordem será:

1.º) calcular o que estiver entre parenteses ( )
2.º) calcular o que estiver entre colchetes [ ]
3.º) calcular o que estiver entre chaves { }

Exemplos:

1.º) $6 + 12 \div 3$

$6 + 4 = 10$

2.º) $(6 + 12) \div 3$

$18 \div 3 = 6$

3.º) $46 - \{54 - 3 \times [(7 + 6 \div 2) - (4 \times 3 - 5)]\} =$

$46 - \{54 - 3 \times [(7 + 3) - (12 - 5)]\} =$

$46 - \{54 - 3 \times [10 - 7]\} =$

$46 - \{54 - 3 \times 3\} =$

$46 - \{54 - 9\} =$

$46 - 45 = 1$

Sinais Símbolos	Escrita	Leitura
$+$	$3 + 2$	três **mais** dois
$-$	$5 - 2$	cinco **menos** dois
$\Longleftrightarrow$	$6 - 5 = 1 \Longleftrightarrow 1 + 5 = 6$	seis menos cinco igual a um **equivale** a um mais cinco igual a seis.
$\times$ $\bullet$	a x b ou a • b	a **vezes** b
$\div$	$10 \div 5$	dez **dividido** por cinco

Operação	PROPRIEDADES ESTRUTURAIS OPERATÓRIAS			
	Comutativa	Elemento Neutro	Associativa	Distributiva
Adição	**SIM** Exemplo: $10+2=2+10$	**SIM**: zero Exemplo: $7+0=0+7=7$	**SIM** Exemplo: $2+(3+7)=(2+3)+7$	**NAO**
Subtração	**NAO**	**NAO**	**NAO**	**NAO**
Multiplicação	**SIM** Exemplo: $6 \times 3 = 3 \times 6$	**SIM**: 1 Exemplo: $6 \times 1 = 1 \times 6 = 6$	**SIM** Exemplo: $7 \times (2 \times 4) = (7 \times 2) \times 4$	**SIM** em relação à: Adição e Subtração $5 \times (7+4) = 5 \times 7 + 5 \times 4$ $(6-2) \times 3 = 6 \times 3 - 2 \times 3$
Divisão	**NAO**	**NAO**	**NAO**	**NAO**

NOTAS PARA O PROFESSOR

As propriedades das operações adição e multiplicação deverão ser bastante exercitadas, pois elas nos levam a simplificações de cálculo que serão muito usadas.

O aluno deverá saber aplicá-las sem se preocupar com os nomes como: comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro.

Por exemplo: o aluno deverá ser capaz de adicionar várias parcelas de diferentes maneiras para obter um resultado. Nesta hora ele estará empregando a propriedade associativa, sem saber que tal propriedade toma este nome.

$$3 + \underbrace{2 + 4} = 3 + 6 = 9$$

$$\underbrace{3 + 2} + 4 = 5 + 4 = 9$$

No estudo de propriedades das operações, estas foram generalizadas através de expressões envolvendo letras. Tais expressões não deverão ser dadas aos alunos.

Lembramos, também, que as técnicas de cálculo de cada operação devem seguir as etapas indicadas, isto é, partir dos casos mais simples e, aumentando as dificuldades, chegar aos casos que exigem maior técnica.

Chegaremos sempre a uma sentença matemática através de uma situação problemática. O professor, ou o professor com a colaboração do aluno, poderá supor uma situação. A ela corresponde uma sentença. Aí então partimos para a resolução da sentença. O aluno trabalhará com sentenças abertas e fechadas, sem que haja necessidade de se fixar esta nomenclatura.

É necessário observar a seqüência em que as sentenças serão apresentadas aos alunos, isto é, das mais simples, compreendendo poucas operações, até aquelas onde entram as quatro operações com números naturais.

O professor deverá observar que a multiplicação foi introduzida, no guia, através do produto cartesiano entre conjuntos. No livro do aluno, ela é introduzida por meio de adições repetidas. O professor deve introduzir a multiplicação como aparece no guia de Matemática, isto é, através do produto cartesiano entre conjuntos.

UNIDADE 4

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS NATURAIS

OBJETIVOS

1 — Identificar as relações de ordem em N: "ser múltiplo de" e "ser divisor de".
2 — Efetuar a operação maximação e minimação por intermédio da interseção de conjuntos.

DESENVOLVIMENTO

MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

Suponha um número qualquer pertencente ao conjunto dos números naturais: 8, por exemplo.

$8 \in N$

Vamos multiplicá-lo pelos números do conjunto N:

$$\begin{aligned}
8 \times 0 &= 0 \\
8 \times 1 &= 8 \\
8 \times 2 &= 16 \\
8 \times 3 &= 24 \\
8 \times 4 &= 32 \\
8 \times 5 &= 40 \\
8 \times 6 &= 48 \\
8 \times 7 &= 56 \\
8 \times 8 &= 64 \\
8 \times 9 &= 72 \\
8 \times 10 &= 80
\end{aligned}$$

etc.

Esses produtos, ou seja, os resultados destas multiplicações: 0, 8, 16, 24, etc. são chamados **múltiplos do número 8.**

Notamos, então, que os múltiplos de um número natural são obtidos quando multiplicamos este número natural por outros números naturais quaisquer.

Assim:

$6 \times 2 = 12 \longrightarrow$ 12 é múltiplo de 6, porque 6 multiplicado pelo natural 2, deu como resultado 12.

Mas sabemos que vale a propriedade comutativa, temos:

$2 \times 6 = 12 \longrightarrow$ 12 é múltiplo de 2, porque 2 multiplicado pelo natural 6 deu como resultado 12.

Então: 8 é múltiplo de 2 porque $8 = 2 \times 4$

8 é múltiplo de 4 porque $8 = 4 \times 2$

E também:

15 é múltiplo de 5 e de 3 porque $15 = 3 \times 5$

18 é múltiplo de 3 e 6 porque $18 = 3 \times 6$

Dado um número natural qualquer, podemos sempre encontrar os seus múltiplos, como fizemos para o número 8.

Quando formamos com estes múltiplos um conjunto, estamos determinando o conjunto dos múltiplos de 8, que anotaremos: M (8).

Então M (8) $= \{ 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \ldots \}$

M (8) lê-se: conjunto dos múltiplos de 8.

E se quisermos determinar M (4)?

Temos que procurar os números naturais que são múltiplos de 4. Devemos então multiplicar o número 4 pelos números naturais.

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$$

$$4 \times 0 \quad 4 \times 1 \quad 4 \times 2 \quad 4 \times 3 \quad 4 \times 4 \quad 4 \times 5 \quad 4 \times 6$$

$$M\ (4) = \{ 0, \quad 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \ldots \}$$

M (4) é o conjunto dos múltiplos de 4.

Vamos procurar o M(0):

$$N = \{ 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots \}$$

$$0 \times 0 \quad 0 \times 1 \quad 0 \times 2 \quad 0 \times 3 \quad 0 \times 4$$

$$M(0) = \{ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ldots \}$$

Como em um conjunto não repetimos elementos, então:

$M(0) = \{0\}$ O único elemento deste conjunto é o próprio zero.

Logo: M(0) é um conjunto unitário.

ATENÇÃO: Você já deve ter notado que o **conjunto dos múltiplos** de um número natural qualquer, diferente de zero, é sempre **infinito.**

Devemos tomar cuidado ao representar o conjunto dos múltiplos de um número. Sendo ele um conjunto infinito, devemos escrever tantos elementos quantos forem necessários para que possamos dizer se um elemento qualquer pertence ou não àquele conjunto.

Qual seria o M(1)?

$$M(1) = \{ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ldots \}$$

O conjunto dos múltiplos de 1 é igual ao conjunto dos números naturais.

Determinando agora o conjunto dos múltiplos de 3, teremos:

$$N = \{ 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots \}$$

$$3 \times 0 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 4 \quad 3 \times 5$$

$$M(3) = \{ 0, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \ldots \}$$

Podemos afirmar que as sentenças abaixo são verdadeiras:

$12 \in M(3)$ pois $12 = 3 \times 4$

$30 \in M(3)$ pois $30 = 3 \times 10$

$8 \notin M(3)$ pois não existe nenhum número natural que multiplicado por 3 dê como resultado o número 8.

NOTA: Dizer que $12 \in M(3)$ é o mesmo que dizer que 12 é múltiplo de 3. $16 \in M(4)$, então 16 é múltiplo de 4.

Outros exemplos:

$M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Verificamos que o conjunto dos múltiplos de 2 é igual ao conjunto dos números pares.

Os múltiplos de 2 foram obtidos multiplicando-se **2** por todos os números naturais. Esses múltiplos de 2 são chamados **dobro** de cada número natural.

Assim: $6 = 2 \times 3 \longrightarrow$ 6 é dobro de 3
$10 = 2 \times 5 \longrightarrow$ 10 é dobro de 5
$14 = 2 \times 7 \longrightarrow$ 14 é dobro de 7
$22 = 2 \times 11 \longrightarrow$ 22 é dobro de 11

Então, para acharmos o dobro de um número, basta multiplicarmos esse número por 2.

Exemplo: Dobro de 15 $\longrightarrow 15 \times 2 = 30$
Dobro de 42 $\longrightarrow 42 \times 2 = 84$
Dobro de 139 $\longrightarrow 139 \times 2 = 278$

Vimos então que o múltiplo de 2 recebe um nome especial: **dobro.** Assim, os múltiplos de 3, 4, 5, etc. também recebem nomes **especiais.**

Os múltiplos de 3 são chamados **triplos**

Assim: $18 = 3 \times 6 \longrightarrow$ 18 é triplo de 6
$27 = 3 \times 9 \longrightarrow$ 27 é triplo de 9

Então para acharmos o triplo de um n.º basta multiplicarmos este número por 3.

Exemplo: Triplo de 7 $\longrightarrow 7 \times 3 = 21$
Triplo de 35 $\longrightarrow 35 \times 3 = 105$
Triplo de 214 $\longrightarrow 214 \times 3 = 642$

Os múltiplos de 4 são chamados **quádruplos**

Assim: $20 = 4 \times 5$, então: 20 é quádruplo de 5
$32 = 4 \times 8$ 32 é quádruplo de 8

Exemplo: Quádruplo de 11 $\longrightarrow 11 \times 4 = 44$
Quádruplo de 23 $\longrightarrow 23 \times 4 = 92$
Quádruplo de 241 $\longrightarrow 241 \times 4 = 964$

Os múltiplos de 5 são chamados **quíntuplos**

Assim: $15 = 5 \times 3$, então: 15 é quíntuplo de 3
$50 = 5 \times 10$ — 50 é quíntuplo de 10

Exemplo: Quíntuplo de 19 $\longrightarrow 19 \times 5 = 95$
Quíntuplo de 46 $\longrightarrow 46 \times 5 = 230$
Quíntuplo de 317 $\longrightarrow 317 \times 5 = 1.585$

Você já deve ter observado alguns fatos interessantes, como por exemplo:

$0 \in M(8)$
$0 \in M(4)$
$0 \in M(3)$
$0 \in M(2)$
$0 \in M(1)$, logo 0 é múltiplo de 8, 4, 3, 2, 1, o que nos

leva a concluir que:

Zero é múltiplo de qualquer número natural

Temos também que

$8 \in M(8)$ — 8 é múltiplo de 8 pois $8 = 8 \times 1$
$3 \in M(3)$ — 3 é múltiplo de 3 pois $3 = 3 \times 1$
$1 \in M(1)$ — 1 é múltiplo de 1 pois $1 = 1 \times 1$
$2 \in M(2)$ — 2 é múltiplo de 2 pois $2 = 2 \times 1$
o que nos leva a dizer que:

Todo número é múltiplo dele mesmo

É importante que o professor dê vários exemplos a fim de fixar bastante as noções que estamos evidenciando:

- **Múltiplo de um número natural** é o produto desse número por um número natural qualquer.
- Zero é múltiplo de qualquer número natural.
- O conjunto de múltiplos de um número natural diferente de zero é **infinito.**
- Todo número é múltiplo de si mesmo.
- Os múltiplos de 2, 3, 4, 5, são chamados, respectivamente, dobro, triplo, quádruplo, quíntuplo.

DIVISORES DE UM NÚMERO

Sabemos que **15 é múltiplo de 3**

ou seja: $15 = 3 \times 5$

Pela operação inversa da multiplicação, que é a divisão, temos:

$15 \div 3 = 5$
$15 \div 5 = 3$

Estas divisões são exatas, então dizemos que:

15 é divisível por 3 e 15 é divisível por 5

Exemplo:

$24 = 6 \times 4$

Logo: $24 \in M(6) \longrightarrow 24$ é múltiplo de 6
$24 \in M(4) \longrightarrow 24$ é múltiplo de 4

Mas pela operação inversa:

$24 \div 6 = 4$ Logo: 24 é **divisível** por 6
$24 \div 4 = 6$ 24 é **divisível** por 4

Concluindo:

> Se um número é **múltiplo** de outro, diz-se também que ele é **divisível** por este outro

Como vimos: 24 é divisível por 6 ou 24 é múltiplo de 6.

Dizemos então que: **6 é divisor de 24**

Da mesma forma: 24 é divisível por 4 ou 24 é múltiplo de 4.

Então: **4 é divisor de 24**

Outro exemplo:

$14 \in M(7)$
$14 \in M(2)$

14 é múltiplo de 7, então 14 é divisível por 7
14 é múltiplo de 2, então 14 é divisível por 2

Logo, pelo que observamos no exemplo anterior, temos:
7 e 2 são divisores de 14.

Suponha agora um número natural qualquer: 12, por exemplo

$12 \in N$

Procuremos as diferentes maneiras de escrever este número, fazendo uso da operação multiplicação:

$12 = 1 \times 12$ e $12 = 12 \times 1$
$12 = 2 \times 6$ e $12 = 6 \times 2$
$12 = 3 \times 4$ e $12 = 4 \times 3$

Então podemos dizer: 12 é múltiplo de 1 e 12
12 é múltiplo de 2 e 6
12 é múltiplo de 3 e 4

E daí temos: 1 e 12 são divisores de 12
2 e 6 são divisores de 12
3 e 4 são divisores de 12

Isto é, 1, 2, 3, 4, 6 e 12 dividem o número 12 exatamente (a divisão é exata).

Formando um conjunto com estes números, estaremos determinando o conjunto dos divisores do número 12, que anotaremos D (12).

Então $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

D (12) é o conjunto dos divisores de 12 e percebemos, facilmente, ser um conjunto finito.

Qual seria o D (8)?

Para achar os divisores de 8, devemos então saber de quais números o 8 é múltiplo.

Você então observa que múltiplo e divisor andam sempre juntos.

$8 = 1 \times 8$ $\qquad$ $8 = 8 \times 1$

$8 = 2 \times 4$ $\qquad$ $8 = 4 \times 2$

Temos: 8 é múltiplo de 1 e 8
8 é múltiplo de 2 e 4.

O que nos leva a afirmar que:

1 e 8 são divisores de 8
2 e 4 são divisores de 8

Então, se 1, 2, 4 e 8 são os divisores de 8, teremos

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

D (8) é o conjunto dos divisores de 8
Pelo que analisamos para D (12) e D (8), você deve ter notado que:

$1 \in D(12)$

$1 \in D(8)$, ou seja, 1 é divisor de 12 e 1 é divisor de 8.

O professor deverá dar oportunidades ao aluno de determinar conjunto de divisores de vários números naturais, levando-o a concluir que:

Um é divisor de qualquer número natural

Do mesmo modo:

$12 \in D(12)$

$8 \in D(8)$, e, lançando mão dos exemplos apresentados em sala de aula, os alunos poderão ser levados a descobrir que: todo número é divisor dele mesmo.

Lembre-se que:

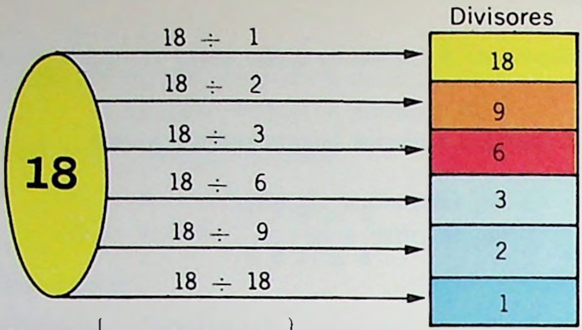
$12 \div 0$
$8 \div 0$ são divisões impossíveis.

Logo, o zero não é divisor de nenhum número natural. Portanto o zero também não é divisor de zero.

Então:

Todo número natural diferente de zero é divisor dele mesmo

Determinemos agora D (18) (conjunto dos divisores de 18)



D (18) = $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Como:

18 é **múltiplo** de 3 então 3 é **divisor** de 18
18 é **múltiplo** de 9 então 9 é **divisor** de 18
18 é **múltiplo** de 18 então 18 é **divisor** de 18 e assim por diante.

Afirmamos que:

Ser múltiplo de e **ser divisor de** exprimem idéias contrárias.

O professor poderá chamar a atenção do aluno, através de exercícios variados, para os seguintes fatos:

- Um número natural é **divisível** por outro, quando a sua divisão por este outro é exata.
- Quando um número natural é múltiplo de outro, este chama-se **divisor** do primeiro.
- As relações: **ser múltiplo de** e **ser divisor de** exprimem idéias contrárias.
- O 1 é divisor de qualquer número natural.
- Todo número natural, diferente de zero, é divisor dele mesmo.
- O conjunto dos divisores de qualquer número natural diferente de zero é um conjunto finito.

Variados exercícios usando relações de inclusão e de pertinência com conjuntos de múltiplos e divisores de um número natural poderão ser feitos, assegurando, assim, maior compreensão das relações.

ser múltiplo de

ser divisor de

Exemplos:

O nosso conjunto universo ainda é o conjunto dos números naturais

N = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Tomemos agora um número natural: 9

$9 \in N$

9 → M (9) = $\{0, 9, 18, 27, 36, 45, \ldots\}$

→ D (9) = $\{1, 3, 9\}$

Tais sentenças são falsas ou verdadeiras?

$9 \in D(9)$	$D(9) \subset N$
$17 \in M(9)$	$M(9) \subset N$
$0 \in D(9)$	$D(9) \subset M(9)$

Temos:

$9 \in D(9)$ é verdadeiro, pois 9 é divisor de 9.

$17 \in M(9)$ é falso, pois não existe nenhum número natural que multiplicado por 9 dê como resultado o 17. Logo 17 não é múltiplo de 9.

$0 \in D(9)$ é falso, pois já vimos que zero não é divisor de nenhum número natural.

$D(9) \subset N$ é verdadeiro. Todo divisor de um n.º natural é também um número natural. Logo, o conjunto dos divisores de nove é um subconjunto dos naturais.

Também o conjunto dos divisores de qualquer número natural é um **subconjunto** dos naturais.

$M(9) \subset N$ é verdadeiro. Todo múltiplo de um número natural é um número natural. Logo o conjunto dos múltiplos de qualquer número natural é **um subconjunto** dos naturais.

$D(9) \subset M(9)$ é falso: $3 \in D(9)$ mas $3 \notin M(9)$, logo:

$$D(9) \not\subset M(9)$$

Qual seria o D (0) (conjunto de divisores de zero)?

Sabemos que:

$$0 \div 1 = 0$$
$$0 \div 2 = 0$$
$$0 \div 3 = 0,$$

e assim por diante.

Logo, 1, 2, 3, 4, ... são divisores de zero. Então: $D(0) = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Estamos trabalhando com conjuntos:
conjuntos de múltiplos e conjunto de divisores de números naturais.

Logo podemos operá-los.

Vejamos por exemplo:

1) Conjunto de divisores de 4 $\longrightarrow D(4) = \{1, 2, 4\}$

e

Conjunto de divisores de 6. $\longrightarrow D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

Qual seria o resultado da operação união destes conjuntos?

$$D(4) \cup D(6) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

E a interseção?

$$D(4) \cap D(6) = \{1, 2\}$$

2) Sejam agora os conjuntos

0 → M (0) = { 0 }

0 → D (0) = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... }

7 → M (7) = { 0, 7, 14, 21, 28, ... }

7 → D (7) = { 1, 7 }

Sabemos então determinar:

M (0) ∪ D (0) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... } = N

M (0) ∩ D (0) = { } = ∅

M (7) ∪ M (0) = { 0, 7, 14, 21, 28, ... } = M (7)

M (7) ∩ D (7) = { 7 }

D (0) ∩ D (7) = { 1,7 }

e assim podemos variar bastante os exercícios.

Regras de divisibilidade

Sabemos que um número natural é **divisível** por outro, se a sua divisão por este outro é exata.

Existem regras que nos ajudam a verificar se um número é divisível, ou não, por alguns outros números sem efetuar a divisão. Assim:

Divisibilidade por 2

Se um número é múltiplo de outro, é porque ele é divisível por este outro.

Logo se um número é múltiplo de 2, ele é também divisível por 2.

M (2) = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... }

Este conjunto é igual ao conjunto dos números pares. **Número par** é aquele que termina em 0, 2, 4, 6, 8.

Então:

Um número será divisível por 2, se ele for par

Exemplos:

10 é divisível por 2, pois 10 é par (termina em 0)
146 é divisível por 2, pois 146 é par (termina em 6)
83 não é divisível por 2, pois 83 não é par (não termina em 0, 2, 4, 6 nem 8)

Divisibilidade por 5

$$M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$$

O que podemos observar neste conjunto? Todos os múltiplos de 5 terminam em **zero** ou em **cinco.**

Como todos os múltiplos de 5 são divisíveis por 5, temos que:

Um número é divisível por 5, se ele termina em 0 ou 5.

Exemplos:

25 é divisível por 5, pois 25 termina em 5.
34 não é divisível por 5, pois 34 não termina em zero ou cinco.
100 é divisível por 5, pois 100 termina em zero.

Divisibilidade por 10

$$M(10) = \{0, 10, 20, 30, 40, \ldots\}$$

Todos os múltiplos de 10 terminam em **zero.**

Portanto:

Um número é divisível por 10, se ele termina em zero.

Exemplos:

30 é divisível por 10, pois 30 termina em zero.
26 não é divisível por 10, pois 26 não termina em zero.
200 é divisível por 10, pois 200 termina em zero.

Divisibilidade por 3

Vejamos o conjunto dos múltiplos de 3.

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$$

Notamos que agora é impossível determinarmos se um número é divisível por 3, apenas pelo seu último algarismo.

Façamos então o seguinte trabalho:

Tomemos alguns números divisíveis por 3 e vamos adicionar os valores absolutos dos seus algarismos.

Assim:

$12 \longrightarrow 1 + 2 = 3$ e 3 é divisível por 3
$15 \longrightarrow 1 + 5 = 6$ e 6 é divisível por 3
$18 \longrightarrow 1 + 8 = 9$ e 9 é divisível por 3
$21 \longrightarrow 2 + 1 = 3$
$24 \longrightarrow 2 + 4 = 6$
$27 \longrightarrow 2 + 7 = 9$

E isto vai sempre acontecer. Isto é, sempre que adicionarmos os valores absolutos dos algarismos de um número divisível por 3, o resultado (soma) será divisível por 3.

Vamos ver um exemplo:

Você quer verificar se o número 141 é divisível por 3.

Então deverá adicionar os valores absolutos dos algarismos que formam este número.

$$141 \qquad 1 + 4 + 1 = 6$$

6 é o resultado da adição e 6 é divisível por 3.

Logo 141 é um número divisível por 3.

Será que o número 260 é divisível por 3?

$$260 \qquad 2 + 6 + 0 = 8$$

Sabemos que 8 não é um número divisível por 3, pois se dividirmos 8 por 3, a divisão não será exata.

Logo 260 não é um número divisível por 3.

Vamos verificar outros exemplos:

- $502 \longrightarrow 5 + 0 + 2 = 7$

  7 não é divisível por 3 porque se dividirmos 7 por 3, encontraremos como resto: 1.

  Logo a divisão de 7 por 3 não é exata.

  Daí, se 7 não é divisível por 3, então 502 não é divisível por 3.

- $1.233 \longrightarrow 1 + 2 + 3 + 3 = 9$

  9 é divisível por 3, então 1.233 é divisível por 3.

- $1.000 \longrightarrow 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

  1 não é divisível por 3. Então 1.000 não é divisível por 3.

- $4.871 \longrightarrow 4 + 8 + 7 + 1 = 20$

  Como saber se 20 é ou não divisível por 3?

  Basta fazermos a mesma coisa para o 20, assim:

  $$20 \longrightarrow 2 + 0 = 2$$

  Como 2 não é divisível por 3, então 20 não é divisível por 3 e daí 4.871 não é divisível por 3.

  $$4.871 \xrightarrow{4+8+7+1} 20 \xrightarrow{2+0} 2$$

- $5.068 \longrightarrow 5 + 0 + 6 + 8 = 19$

  $19 \longrightarrow 1 + 9 = 10$

  $10 \longrightarrow 1 + 0 = 1$

  Temos:

  $$5.068 \xrightarrow{5+0+6+8} 19 \xrightarrow{1+9} 10 \xrightarrow{1+0} 1$$

Divisibilidade por 9

Lembremos, agora, o conjunto dos múltiplos de 9:

$$M\ (9) = \{0,\ 9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ \ldots\}$$

Assim como vimos para os números divisíveis por 3, é também impossível sabermos se um número é divisível por 9 ou não, apenas pelo seu último algarismo.

Vamos fazer o mesmo trabalho que fizemos para os números divisíveis por 3, isto é, vamos adicionar os valores absolutos de seus algarismos:

18 $\longrightarrow$ $1 + 8 = 9$ e 9 é divisível por 9

27 $\longrightarrow$ $2 + 7 = 9$ e 9 é divisível por 9

36 $\longrightarrow$ $3 + 6 = 9$ e 9 é divisível por 9

45 $\longrightarrow$ $4 + 5 = 9$ e 9 é divisível por 9

Isto vai sempre acontecer. Isto é, sempre que adicionarmos os valores absolutos dos algarismos de um número divisível por 9, o resultado (soma) será divisível por 9.

Vejamos uns exemplos:

- 594 $\longrightarrow$ $5 + 9 + 4 = 18$

Sabemos que 18 é um número divisível por 9, como já vimos.

Logo se 18 é divisível por 9 então 594 é divisível por 9.

- 216 $\longrightarrow$ $2 + 1 + 6 = 9$

Como 9 é divisível por 9 então vemos que 216 é um número divisível por 9.

- 7.031 $\longrightarrow$ $7 + 0 + 3 + 1 = 11$

11 é divisível por 9?

Como saber?

Basta fazermos o mesmo trabalho, isto é, adicionarmos os valores absolutos dos algarismos do número 11.

Então: 11 $\longrightarrow$ $1 + 1 = 2$

$$7.031 \xrightarrow{7 + 0 + 3 + 1} 11 \xrightarrow{1 + 1} 2$$

2 não é divisível por 9, então 11 não é divisível por 9. Daí 7.031 não ser divisível por 9.

- 5.697 $\longrightarrow$ $5 + 6 + 9 + 7 = 27$

  27 $\longrightarrow$ $2 + 7 = 9$

Temos:

$$5.697 \xrightarrow{5 + 6 + 9 + 7} 27 \xrightarrow{2 + 7} 9$$

Como 9 é divisível por 9, 27 é divisível por 9. então 5.697 é divisível por 9.

- 1.097 $\longrightarrow$ $1 + 0 + 9 + 7 = 17$

  17 $\longrightarrow$ $1 + 7 = 8$

Como 8 não é divisível por 9, 17 não é divisível por 9 e daí 1.097 não ser divisível por 9.

Concluindo:

I) Um número é divisível por 3, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos deste número for um número divisível por 3.

II) Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos deste número for um número divisível por 9.

Lembrando agora todas as regras de divisibilidade citadas, isto é, o modo pelo qual procuramos saber se o número é divisível por 2, 3, 5, 9 e 10, podemos concluir através do quadro:

UM NÚMERO É DIVISÍVEL POR:	
2	quando for par.
3	quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 3.
5	quando o algarismo das unidades for 0 ou 5.
9	quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 9.
10	quando o algarismo das unidades for 0.

Número um e número zero; Números primos; Números compostos

No estudo de divisores de um número asseguramos que todo número natural, diferente de zero, tem, pelo menos, como divisor: 1 e ele mesmo.

Agora, observemos os conjuntos:

$D(2) = \{1, 2\} \longrightarrow$ divisores de 2

$D(5) = \{1, 5\} \longrightarrow$ divisores de 5

$D(7) = \{1, 7\} \longrightarrow$ divisores de 7

$D(13) = \{1, 13\} \longrightarrow$ divisores de 13

Verificamos que 2, 5, 7 e 13 são divisíveis **somente** por 1 e por si mesmos. Eles não têm outros divisores.

Podemos encontrar outros números que **só** são divisíveis por 1 e por eles mesmos.

Exemplo:

3, 11, 17, 19 etc.

Como podemos observar:

$D(3) = \{1, 3\}$

$D(11) = \{1, 11\}$

$D(17) = \{1, 17\}$

$D(19) = \{1, 19\}$

Estes números que **só** têm dois divisores diferentes, isto é, só são divisíveis por 1 e por eles mesmos, são chamados de **números primos.**

Será que 1 é número primo?

Vamos determinar o conjunto dos divisores do 1.

D (1) = $\{1\}$

Observamos que o número 1 é divisível apenas por ele mesmo.

Para que fosse primo, deveria ter dois divisores diferentes: ele mesmo e a unidade.

Mas no caso do número 1, ele mesmo e a unidade são o mesmo número, isto é,

ele mesmo ⟶ 1

a unidade ⟶ 1, logo o número 1 não tem dois divisores diferentes.

Daí temos que: 1 não é número primo.

Podemos dizer que:

Número primo é o número que possui **somente dois divisores** diferentes: 1 e ele mesmo

Poderia surgir a pergunta:

Quantos números primos existem?

Podemos enumerar os primeiros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 31,...

Se continuássemos a dizer todos os números primos, encontraríamos muitos outros.

Como curiosidade, vamos conhecer todos os números primos menores que 1.000.

2	47	109	191	269	353	439	523	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

Construímos um quadro onde todos os números primos até 1.000 foram colocados em ordem crescente.

Fizemos, assim, a **tábua** dos números primos menores do que 1.000.

Atualmente, esta e outras tábuas podem ser feitas, usando-se máquinas que calculam rapidamente: computadores.

Ainda existem muitos números primos depois de 1.000.

45 é um número primo?

Sabemos que 45 é divisível por 5, logo 45 não é um número primo, pois, além de ser divisível por ele mesmo e por 1, é divisível por 5.

Notamos, também, que 45 tem outros divisores:

$$D\ (45) = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 45\}$$

Quando um número além de ser divisível por ele mesmo e pela unidade possui outros divisores ele é dito composto.

Logo:

45 é um número composto.

Vamos pensar em outros números compostos:

15 é um número composto pois além de ser divisível por ele mesmo e por 1 é também divisível por 3 e 5.

14 é um número composto pois além de ser divisível por ele mesmo e por 1 é também divisível por 2 e 7.

108 é um número composto pois além de ser divisível por ele mesmo e por 1, sabemos que é divisível por 2 já que é um número par.

Notamos, facilmente, que qualquer número par diferente de 2 (já verificamos que o 2 é um número primo) e de zero será um número composto pois terá sempre como divisor, além de si mesmo e 1, também o 2.

Então: **O único número par que é primo é o 2.**

E o 1?

Já verificamos que 1 não é um número primo. Será, então, um número composto?

$$D\ (1) = \{1\}$$

Se 1 só é divisível por ele mesmo, não é um número composto. Para que fosse composto deveria ser divisível por 1, por si mesmo e por mais um número.

Logo: **1 não é um número composto**

Então: **Número composto é o número que além de ser divisível por ele mesmo e a unidade, é divisível por outros números.**

E o número zero?

Vamos lembrar o conjunto dos divisores de zero

$$D\ (0) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots\}$$

Sabemos que não podemos efetuar $0 \div 0$. Logo zero não é divisível por ele mesmo.

Então:

Zero não é número primo pois é divisível por 1, mas não é divisível por si mesmo.

Zero não é número composto. Ele possui infinitos divisores, mas não é divisível por ele mesmo.

Números primos entre si

Vamos determinar os divisores de 16 e 9.

$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ e $D(9) = \{1, 3, 9\}$

Quais são os divisores comuns de 16 e 9? Isto é, quais são os números que dividem 16 e 9 ao mesmo tempo?

Vamos fazer a interseção destes dois conjuntos para verificarmos:

$D(16) \cap D(9) = \{1\}$

Quando dois ou mais números admitem somente o 1 como divisor comum, são chamados **primos entre si**.

Outros exemplos:

→ 5, 7 e 12 são primos entre si?

$D(7) = \{1, 7\}$ $D(5) = \{1, 5\}$ $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Divisores comuns de 5, 7 e 12· $D(5) \cap D(7) \cap D(12) = \{1\}$

5, 7 e 12 são primos entre si pois admitem somente o 1 como divisor comum.

→ 8 e 10 são primos entre si?

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$

Divisores comuns de 8 e 10: $D(8) \cap D(10) = \{1, 2\}$

Como 8 e 10 admitem outro divisor comum, além do 1, eles não são primos entre si.

→ 14 e 15 são primos entre si?

$D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$ $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$

$D(14) \cap D(15) = \{1\}$

14 e 15 têm como único divisor comum o 1, logo 14 e 15 são primos entre si.

Note que 15 é sucessor de 14 e 15 e 14 são primos entre si.

O professor através de variados exemplos deverá levar o aluno a concluir que:

> Dados dois números, sendo um sucessor do outro, estes números serão primos entre si.

Para que dois ou mais números sejam primos entre si não precisam, necessariamente, cada um deles ser primo.

Vimos exemplos de dois números compostos primos entre si:

16 e 9 são primos entre si.

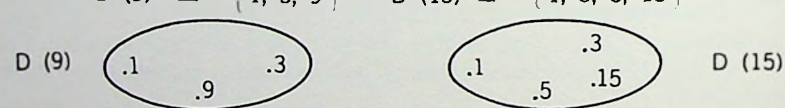
O professor poderá chamar a atenção do aluno, através de exercícios variados, para os seguintes fatos:

- **Número primo** é o número que possui somente dois divisores diferentes: 1 e ele mesmo.
- **O único número par** que é primo é o 2.
- **Número composto** é o número que possui outros divisores além dele mesmo e da unidade.
- **O número 1** e **o número 0** não são números primos nem compostos.
- Quando dois ou mais números admitem somente o 1 como divisor comum são chamados **primos entre si.**
- Se temos dois números, sendo um sucessor do outro, estes números serão **primos entre si.**

Operação Maximação ⟶ Resultado Máximo Divisor Comum

Lembramos que estamos trabalhando no conjunto dos números naturais. Vamos determinar o conjunto de divisores de 9 e 15:

$$D(9) = \{1, 3, 9\} \qquad D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$$

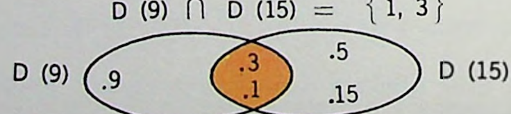


Notamos que 9 e 15 têm divisores comuns, isto é, alguns números são divisores de 9 e 15 ao mesmo tempo.

Vamos, então, formar um conjunto com os divisores comuns de 9 e 15.

Logo devemos determinar a interseção destes dois conjuntos.

$$D(9) \cap D(15) = \{1, 3\}$$



Qual o **maior** divisor que 9 e 15 têm em comum? 3

Calculamos, assim, o maior divisor comum de 9 e 15, isto é,

m.d.c. (9, 15) = 3 (lê-se: O maior divisor comum de 9 e 15 é 3)

A operação que permite determinar o maior divisor comum de dois (ou mais) números é denominada **maximação.**

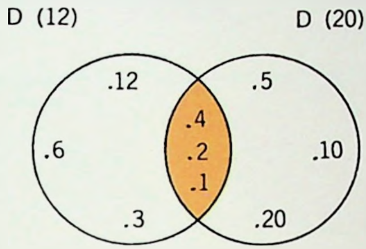
Então:

> Operação: Maximação
> Resultado: m. d. c. (máximo divisor comum)

Vamos ver outros exemplos da **operação maximação.**

Temos:

→ D (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12} e D (20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}



D (12) ∩ D (20) = {1, 2, 4}

Então:

1, 2 e 4 são os divisores comuns de 12 e 20.

O maior número que divide ao mesmo tempo 12 e 20 é o número 4.

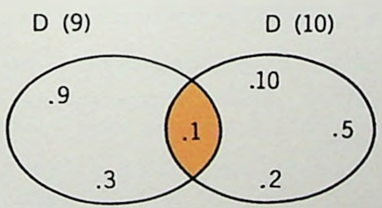
Então o maior divisor comum de 12 e 20 é 4.

Logo,

m.d.c.(20, 12) = 4

→ D (10) = {1, 2, 5, 10}

D (9) = {1, 3, 9}



D (10) ∩ D (9) = {1}.

10 e 9 são primos entre si, pois o único divisor que eles têm em comum é o 1.

Logo, o maior divisor comum de 9 e 10 é 1.

Então: m.d.c.(9, 10) = 1

O professor, após alguns exercícios deste tipo, deverá encaminhar o raciocínio do aluno para que ele conclua que:

O maior divisor comum de dois ou mais números primos entre si é 1.

→ m.d.c.(7, 15) = 1 pois 7 e 15 são primos entre si

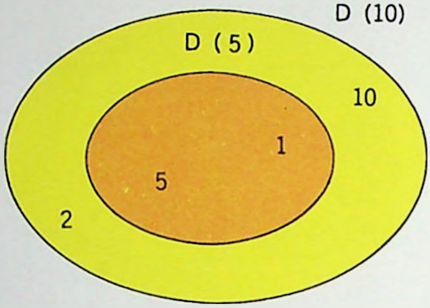
→ m.d.c.(17, 20) = 1 pois 17 e 20 são primos entre si.

→ D (10) = {1, 2, 5, 10} e D (5) = {1, 5}

Observamos que todo elemento de D (5) pertence a D (10), isto é,

D (5) ⊂ D (10) Logo: D (10) ∩ D (5) = {1,5} = D (5)

O maior divisor comum de 10 e 5 é 5.



Os divisores de 5 são os divisores comuns de 5 e 10.

Note que: 10 é divisível por 5; 5 é o maior divisor comum de 5 e 10.

Exemplos deste tipo deverão ser dados para que o aluno conclua que:

O maior divisor comum de dois ou mais números, quando o menor deles é divisor de todos os outros, é sempre o menor.

Então:

→ m.d.c.(18, 6) = 6 pois 18 é divisível por 6.
→ m.d.c.(8, 4, 2) = 2 pois 2 é divisor de 4 e 8.

Podemos também efetuar a maximação, ou seja, determinar o máximo divisor comum de mais de dois números.

Fazemos para isto o mesmo raciocínio.

→ Qual seria o m.d.c. de 8, 6 e 10?

D (8) = {1, 2, 4, 8} D (6) = {1, 2, 3, 6} D (10) = {1, 2, 5, 10}

Calculando a interseção destes conjuntos, estaremos procurando todos os divisores comuns de 8, 6 e 10, isto é, os números que dividem 8, 6 e 10 ao mesmo tempo.

D (8) ∩ D (6) ∩ D (10) = {1, 2}

O maior destes divisores é o 2.

Logo: o maior divisor comum de 8, 6 e 10 é o número 2.

Anotamos:

m.d.c. (8, 6, 10) = 2.

Lembrando...

- A operação maximação tem por fim determinar o m.d.c. de dois ou mais números.
- O m.d.c. de dois ou mais números primos entre si é sempre 1.
- O m.d.c. de dois ou mais números, quando o menor deles é divisor de todos os outros, é sempre o menor deles.

Operação Minimação ⟶ resultado Mínimo Múltiplo Comum

Determinemos o conjunto dos múltiplos de 4 e 6, no conjunto dos números naturais:

Então: $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$

$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$

Excluindo desses conjuntos o elemento zero, teremos: (veremos mais adiante porque não consideramos o elemento zero).

$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$

$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$

Notamos que 4 e 6 têm múltiplos comuns, isto é, alguns números são múltiplos ao mesmo tempo de 4 e 6, como por exemplo 12, 24, etc...

Para então determinarmos esses múltiplos comuns, devemos procurar o conjunto interseção dos M (6) e M (4).

$M(4) \cap M(6) = \{12, 24, 36 \ldots\}$

Qual o menor múltiplo que 6 e 4 têm em comum? É o 12

Logo 12 é o menor múltiplo comum de 4 e 6, isto é,

m.m.c. (4, 6) = 12 (lê-se: o menor múltiplo comum de 4 e 6 é 12).

Esta operação que nos permite determinar o menor múltiplo comum de dois ou mais números é denominada **minimação.**

O m.m.c. encontrado, que aqui no caso é 12, é o resultado desta operação minimação.

Outros exemplos:

→ m.m.c.(6, 8) = ?

$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots\}$

$M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \ldots\}$

Excluindo o zero desses conjuntos:

$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots\}$

$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \ldots\}$

Vemos que 8 e 6 têm múltiplos em comum.

Determinando a interseção: $M(6) \cap M(8) = \{24, 48, \ldots\}$

O menor destes múltiplos comuns (elementos do conjunto interseção) é o 24.

Logo:

m.m.c.(6, 8) = 24 (lê-se: o menor múltiplo comum de 6 e 8 é 24).

NOTA:

Por que não estamos considerando o elemento zero, ao determinarmos o m.m.c entre números naturais?

Ora, sabemos que zero é múltiplo de qualquer número, e zero é o menor número natural.

Assim sendo, o menor múltiplo comum de quaisquer números naturais seria sempre zero, e esta operação não teria muito sentido.

→ m.m.c.(5,10) = ?

Vamos determinar os múltiplos de 5 e 10, não considerando mais o elemento zero.

$$M(5) = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$$
$$M(10) = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, \ldots\}$$
$$M(5) \cap M(10) = \{10, 20, 30, \ldots\}$$

Notamos que a interseção é o próprio conjunto dos M (10).

E o menor múltiplo comum é o 10

m.m.c.(5, 10) = 10

Você deve ter observado que 10 é divisível por 5, e o m.m.c entre eles foi o 10, isto é, o maior número.

Logo: **O m.m.c de dois ou mais números em que o maior é divisível pelos menores, é o maior deles.**

→ m.m.c.(3, 6) = ?

$$M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots\}$$
$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$$
$$M(3) \cap M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\} = M(6)$$

O menor múltiplo comum de 3 e 6 é 6.

Logo: m.m.c.(3, 6) = 6

→ m.m.c.(8, 16) = 16 pois o maior é divisível pelo outro.

→ m.m.c.(3, 4) = ?

$$M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \ldots\}$$
$$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \ldots\}$$
$$M(3) \cap M(4) = \{12, 24, 36, \ldots\}$$

O menor múltiplo comum de 3 e 4 é 12. m.m.c.(3, 4) = 12.

Observe que 4 é sucessor de 3, logo 3 e 4 são dois números primos entre si.

E o que observamos quanto ao seu m.m.c.?

É 12, que é justamente o produto de 3 por 4. ($3 \times 4 = 12.$)

Concluímos que:

O m.m.c. de dois ou mais números primos entre si é o produto deles.

→ m.m.c. (2, 5) = ?

$M(2) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \ldots\}$

$M(5) = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\}$

$M(2) \cap M(5) = \{10, 20, 30, \ldots\}$

m.m.c.(2, 5) = 10

Sabemos que 2 e 5 são primos entre si e o m.m.c. foi $10 = 2 \times 5$ isto é, o produto deles.

→ m.m.c.(7, 8) = 56 pois 7 e 8 são primos entre si.
m.m.c.(2, 3, 7) = 42 pois 2, 3 e 7 são primos entre si.

NOTA: Para melhor compreensão dos casos especiais de m.m.c, o professor poderá dar bastantes exercícios deste tipo e encaminhar o raciocínio do aluno para que ele mesmo faça as devidas conclusões.

Podemos efetuar a minimação de mais de dois números.
Assim sendo, como calcular o menor múltiplo comum de 4, 6, 8?

$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, \mathbf{24}, 28, 32, 36, 40, \ldots\}$

$M(6) = \{6, 12, 18, \mathbf{24}, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$

$M(8) = \{8, 16, \mathbf{24}, 32, 40, 48, 56, 64, \ldots\}$

Então: $M(4) \cap M(6) \cap M(8) = \{24, 48, \ldots\}$

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = 24, que é o menor número que é múltiplo ao mesmo tempo de 4, 6 e 8.

Lembrando...

- A operação minimação tem por fim calcular o m.m.c. de dois ou mais números.
- O m.m.c. de dois ou mais números primos entre si é o produto deles.
- O m.m.c. de dois ou mais números, quando o maior é divisível pelos menores, é o maior deles.

Abreviatura	Escrita	Leitura
M (. . .)	M (3)	Conjunto de múltiplos de 3
D (. . .)	D (2)	Conjunto de divisores de 2
m.d.c (. . .,. . .)	m.d.c. (6, 4)	O maior divisor comum de 6 e 4.
m.m.c. (. . .,. . .)	m.m.c. (6, 4)	O menor múltiplo comum de 6 e 4.

NOTAS PARA O PROFESSOR

A tabela de números primos até 1.000 aparece no trabalho apenas como uma complementação.

O aluno precisará saber apenas os números primos compreendidos entre 1 e 50.

As operações maximação e minimação não precisam ser dadas usando essas terminologias. O aluno deverá saber distinguir m.d.c. e m.m.c., bem como calculá-los exatamente.

O m.d.c. será útil na simplificação de frações e o m.m.c. na comparação, adição e subtração de frações (numeral que representa um número racional absoluto).

UNIDADE 5

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

OBJETIVOS

1. Empregar os números racionais absolutos e operar corretamente no conjunto dos números racionais absolutos.

2. Resolver situações da vida prática que envolvam operações com números racionais absolutos.

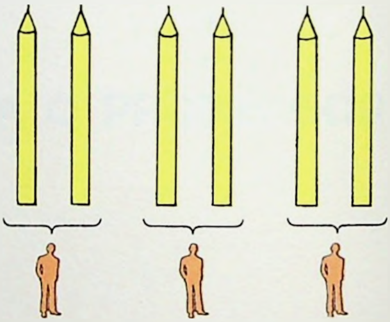
DESENVOLVIMENTO

Número racional absoluto

Muitas vezes temos necessidade de repartir objetos, frutas etc...

Por exemplo:

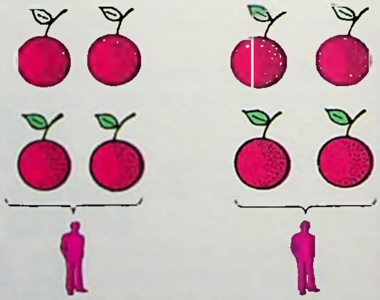
Tinha 6 lápis e os reparti por 3 alunos.



Sabemos que se os reparti igualmente, isto é, se todos receberam a mesma quantidade, cada aluno recebeu 2 lápis.

Ou ainda:

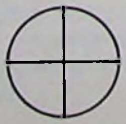
Tinha 8 laranjas e as reparti por 2 sobrinhos.



Sabemos que, nesse caso, cada sobrinho recebeu 4 laranjas.

Poderá surgir também a situação seguinte:

Tenho um bolo e preciso reparti-lo, igualmente, por 4 pessoas.



Poderiam surgir perguntas:

- Que quantidade recebeu cada um?

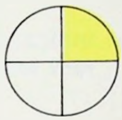
  Dividimos o bolo (que nesse momento representa uma unidade) em 4 partes iguais, portanto, cada um receberá uma dessas partes.

- Qual o numeral que representa a idéia da quantidade recebida por cada um?

  Notamos que não podemos representar esta quantidade por nenhum número natural.

  O bolo inteiro representamos pelo numeral 1. Como representar, então, uma parte do bolo?

  Para representar a idéia da quantidade de **cada pedaço**, precisaremos de dois números naturais, isto é, de um par de números naturais:



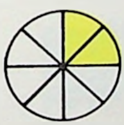
1 ⟶ indica quantas partes estamos tomando da unidade (1 bolo).

4 ⟶ indica em quantas **partes iguais** foi a unidade dividida.

Então o numeral que vai nos dar a idéia da quantidade recebida por cada um será o par ordenado:

(1, 4) onde { 1 ⟶ 1.º elemento do par; 4 ⟶ 2.º elemento do par }

Se o bolo, do exemplo anterior, estivesse dividido em 8 partes iguais, ao representarmos a idéia de quantidade de duas destas partes teríamos o par ordenado: (2, 8)



2 que indica quantas partes estamos tomando da unidade (1 bolo).

8 que indica em quantas partes iguais foi a unidade dividida.

Nos exemplos dados, dividimos o mesmo bolo:

— Primeiro em 4 partes iguais e tomamos uma parte

— Depois em 8 partes iguais e tomamos duas partes

Verificamos que a quantidade tomada do bolo é a **mesma** nos dois casos.

(1, 4)

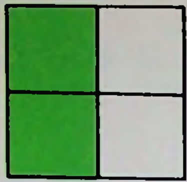
Os pares (1, 4) e (2, 8)

comportam-se da mesma maneira.

(2, 8)

Logo os pares ordenados (1, 4) e (2, 8) são numerais diferentes do mesmo número.

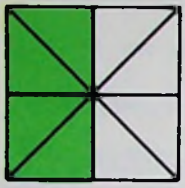
Outros exemplos



(2, 4)

2 → indica quantas partes foram marcadas.

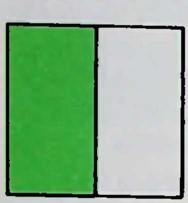
4 → indica em quantas partes iguais foi dividida a unidade.



(4, 8)

4 → indica quantas partes foram marcadas.

8 → indica em quantas partes iguais foi dividida a unidade.



(1, 2)

1 → indica quantas partes foram tomadas.

2 → indica em quantas partes iguais foi dividida a unidade.

Notamos que nas três figuras, as partes marcadas foram as mesmas e representamos cada uma por um numeral diferente.

Logo os pares ordenados (2, 4), (4, 8) e (1, 2) **comportam-se da mesma maneira.**

(1, 3)

(2, 6)

(4, 12)

os pares

(1, 3), (2, 6) e (4, 12)

comportam-se da mesma maneira

Os pares ordenados:

(1, 3), (2, 6) e (4, 12) são numerais diferentes do mesmo número (idéia).

Surge, então, uma nova espécie de número — lembre-se que, até agora, só trabalhamos com números naturais.

Esses números surgiram pela necessidade de representarmos partes de quantidades inteiras.

Ao conjunto de todos estes números chamamos **conjunto dos números fracionários,** que chamaremos de F.

Então, pelos exemplos já vistos (1, 4), (2, 4), (4, 12) são numerais que representam números fracionários diferentes.

Podemos escrever cada um destes números fracionários de outra maneira:

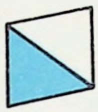
$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{12}$

A estes numerais (símbolos) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{12}$, usados para representar um número fracionário, chamamos de frações.

As frações compõem-se de dois números naturais, tomados numa certa ordem, com o segundo deles diferente de zero, sendo ambos separados por um traço horizontal.

Ao expressarmos a idéia de quantidade, colorida na figura abaixo, temos:

$\frac{1}{2}$



Usamos para escrever esta fração os números naturais 1 e 2 na seguinte ordem:

- acima do traço horizontal o número de partes tomadas — 1.
- abaixo do traço horizontal o número de partes iguais em que a unidade foi dividida — 2.

Do mesmo modo:

$\frac{3}{7}$

$\frac{2}{5}$

Os termos de uma fração recebem nomes especiais:
— o que indica o número de partes tomadas — **numerador**
— o que indica o número de partes iguais em que a unidade foi dividida — **denominador.**

Então, nos exemplos apresentados temos:

$\frac{1}{2}$ 1 é o numerador da fração
2 é o denominador da fração

$\frac{3}{7}$ 3 é o numerador da fração
7 é o denominador da fração

$\frac{2}{5}$ 2 é o numerador da fração
5 é o denominador da fração

Atenção:

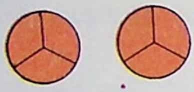
Os números naturais também podem ser escritos sob a forma de fração.

Exemplos:

2

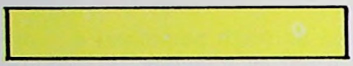
podemos representar esta quantidade sob a forma das seguintes frações:

$\frac{4}{2}$ Dividimos em 2 partes iguais cada unidade e tomamos 4 partes. Teremos, portanto, 2 inteiros.

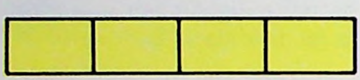


$\frac{6}{3}$ Dividimos em 3 partes iguais cada unidade e tomamos 6 partes. Logo, teremos 2 inteiros.

Vamos ver algumas frações que representam o número natural 1.



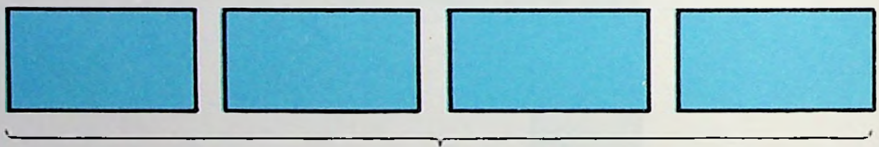
1



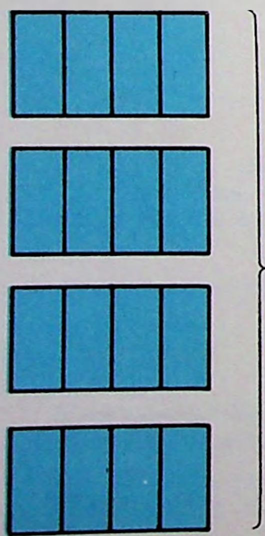
$\frac{4}{4}$ pois se dividirmos em quatro partes iguais devemos tomar as quatro partes para obtermos um inteiro.

$\frac{6}{6}$ pois dividimos em seis partes iguais e tomamos as seis partes.

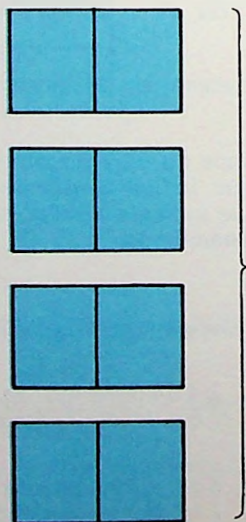
E agora outras que representam o número natural 4.



4



$\frac{16}{4}$



$\frac{8}{2}$

Variados exemplos poderão ser apresentados para mostrar que os números naturais podem ser escritos sob a forma de fração.

Através destes exemplos, o professor levará os alunos a concluirem que:

> Toda fração cujo numerador é múltiplo do denominador representa um número natural que se obtém dividindo-se o numerador pelo denominador.

Exemplos:

$\frac{12}{4}$

Notamos, facilmente, observando a figura, que: $\frac{12}{4}$ identifica-se com o número natural 3 (temos três objetos inteiros).

Sem o apoio de figuras poderíamos fazer essa afirmação apenas dividindo o numerador que é 12 pelo denominador que é 4.

$12 \div 4 = 3$

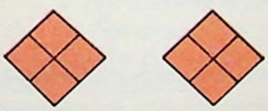
numerador denominador

$\frac{20}{5}$ Observe que 20 é múltiplo de 5, logo $\frac{20}{5}$ representa um número natural.

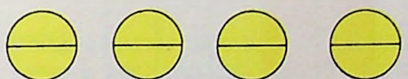
Mas, $20 \div 5 = 4$.

Então, podemos afirmar que $\frac{20}{5}$ é um numeral do número natural 4.

Assim como:



$\frac{8}{4}$ ou 2



$\frac{8}{2}$ ou 4

$\frac{4}{2}$ ou 2

$\frac{2}{1}$ ou 2

$\frac{6}{1}$ ou 6

$\frac{3}{3}$ ou 1

Até agora utilizamos as frações para representar a idéia de quantidade de:

- unidades inteiras
- partes das unidades.

> Quando uma fração representa **unidades inteiras** o seu numerador será sempre múltiplo do seu denominador.

Neste caso teremos frações para representar os números naturais.

$$N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\}$$

$$\frac{0}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{15}{5} \quad \frac{20}{5} \quad \dots$$

$$\frac{0}{8} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{16}{8} \quad \frac{24}{8} \quad \frac{32}{8} \quad \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

> Quando uma fração representa parte de **unidades**, o seu numerador não é múltiplo do seu denominador.

Neste caso teremos frações como: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{4}$

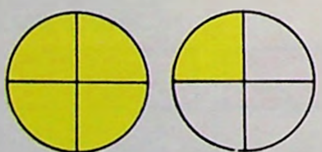
que pertencem ao conjunto dos números fracionários.
Então:

> Toda fração cujo numerador não é múltiplo do denominador representa um número fracionário.

Exemplos:

Temos uma porção da unidade que pode ser representada pela fração $\frac{2}{5}$

Então: $\frac{2}{5}$ é um número fracionário.



Temos uma **porção das unidades** que pode ser representada pela fração $\frac{5}{4}$

Então: $\frac{5}{4}$ é um número fracionário.

Os termos de uma fração, isto é, numerador e denominador, são números naturais.

Sabemos que o conjunto de números naturais é infinito.
Logo, poderemos ter infinitos números fracionários.

> O conjunto dos números fracionários é um **conjunto infinito.**

> Unindo o conjunto dos números naturais — N — ao conjunto dos números fracionários — F — obtemos um novo conjunto — **conjunto dos números racionais absolutos.**

$N \cup F$ é o conjunto dos números racionais absolutos.

Se $5 \in N$ então $5 \in (N \cup F)$; daí podemos afirmar que 5 é um número racional absoluto.

Se $\frac{2}{6} \in F$ então $\frac{2}{6} \in (N \cup F)$; daí $\frac{2}{6}$ é um número racional absoluto.

$\frac{3}{1} \in N$ então $\frac{3}{1} \in (N \cup F)$; daí $\frac{3}{1}$ é um número racional absoluto

Então:

> Qualquer número racional absoluto pode ser representado por uma fração cujo numerador e denominador são números naturais, sendo o denominador diferente de zero.

$\frac{2}{9}$ é um número racional absoluto.

$\frac{0}{6}$ é um número racional absoluto.

$\frac{8}{8}$ é um número racional absoluto.

Como todo númerto natural é um número racional absoluto, podemos afirmar que:

N é um **subconjunto** do **conjunto dos números racionais absolutos.**

Assim como:

Se todo número fracionário é um número racional absoluto, podemos afirmar que:

F é um **subconjunto do conjunto dos números racionais absolutos.**

Lembrando o que foi visto sobre o conjunto dos números naturais e o conjunto de números fracionários, vamos verificar se as sentenças abaixo são verdadeiras:

$\frac{7}{4} \in N$	$\frac{8}{6} \in F$	$\frac{0}{5} \in N$	$\frac{7}{10} \in F$	$N \cap F = \varnothing$	$\frac{4}{0} \in F$

$\frac{7}{4} \in N$ é uma sentença **falsa** pois 7 e 4 são números naturais mas 7 não é múltiplo de 4.

Portanto: $\frac{7}{4}$ não é um número natural, $\frac{7}{4} \in F$.

$\frac{8}{6} \in F$ é uma sentença verdadeira pois 8 e 6 são números naturais, $6 \neq 0$ e 8 não é múltiplo de 6.

$\frac{0}{5} \in N$ é uma sentença **verdadeira,** pois 0 e 5 são números naturais e 0 é múltiplo de 5.

Temos que $\frac{0}{5}$ é o mesmo que 0.

$\frac{7}{10} \in F$ é uma sentença **verdadeira** pois 7 e 10 são números naturais e 7 não é múltiplo de 10.

$N \cap F = \emptyset$ é uma sentença **verdadeira** pois não existe nenhum número que seja natural e fracionário ao mesmo tempo.

Basta lembrar que um **número natural** representa **unidades inteiras** e um **número fracionário** representa **parte de unidades.**

$\frac{4}{0} \in F$ é uma sentença **falsa,** pois 4 e 0 são números naturais, mas o **denominador** é **zero.** Sabemos que o denominador indica em quantas partes foi dividido o inteiro e não podemos dividir nenhum inteiro em zero partes.

Logo $\frac{4}{0}$ não é um número fracionário.

Estudo de frações

Numa fração como, por exemplo: $\frac{2}{3}$, onde 2 é o numerador e 3 o denominador, entende-se que um objeto (representando uma unidade qualquer) foi dividido em 3 partes iguais, das quais foram consideradas duas.

Leitura de frações

Ao proceder a leitura de uma fração lemos primeiro o numerador e depois o denominador.

Lemos os denominadores:

denominador 2 ———— meio

$\frac{1}{2}$ lê-se: um meio

$\frac{5}{2}$ lê-se: cinco meios

denominador 3 ———— terço

$\frac{1}{3}$ lê-se: um terço

$\frac{2}{3}$ lê-se: dois terços

denominador 4 ———— quarto

$\frac{1}{4}$ lê-se: um quarto

$\frac{6}{4}$ lê-se: seis quartos

denominador 5 ———— quinto

$\frac{1}{5}$ lê-se: um quinto

$\frac{3}{5}$ lê-se: três quintos

denominador 6 ——— sexto

$\frac{1}{6}$ lê-se: um sexto

$\frac{6}{6}$ lê-se: seis sextos

denominador 7 ——— sétimo

$\frac{1}{7}$ lê-se: um sétimo

$\frac{5}{7}$ lê-se: cinco sétimos

denominador 8 ——— oitavo

$\frac{1}{8}$ lê-se: um oitavo

$\frac{4}{8}$ lê-se: quatro oitavos

denominador 9 ——— nono

$\frac{1}{9}$ lê-se: um nono

$\frac{6}{9}$ lê-se: seis nonos

Quando os denominadores forem maiores do que 10: 11, 12, 20, 35, etc... após ler os números acrescentamos a palavra avo (quando o numerador é 1) ou avos (quando o numerador é maior do que 1).

Exemplos:

$\frac{8}{12}$ oito doze avos.

$\frac{1}{30}$ um trinta avo.

$\frac{6}{25}$ seis vinte e cinco avos.

$\frac{15}{41}$ quinze quarenta e um avos.

Quando os denominadores forem potências de 10: 10, 100, 1.000 etc... os nomes especiais que recebem são:

denominador 10 ——— décimos

$\frac{1}{10}$ lê-se: um décimo.

$\frac{9}{10}$ lê-se: nove décimos.

denominador 100 ——— centésimo

$\frac{8}{100}$ lê-se: oito centésimos.

denominador 1.000 ——— milésimo

$\frac{6}{1.000}$ lê-se: seis milésimos.

Frações ordinárias e decimais

Quando as frações têm como denominador potências de 10: 10 (10^1), 100 (10^2), 1.000 (10^3), 10.000 (10^4) etc... são chamadas **decimais.**

Então:

$\frac{8}{100}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{1.000}$ **são frações decimais.**

As frações decimais desempenham um papel importante em nosso estudo, como será visto mais tarde.

Às frações com denominadores diferentes das potências de 10 (10, 100, 1.000, etc ...) chamamos de **frações ordinárias.**

Então:

$\frac{7}{15}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{300}$ **são frações ordinárias.**

Frações próprias e impróprias.

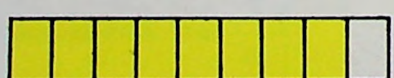
Sabemos que as frações representam uma ou mais partes iguais de uma ou mais unidades.

Observemos a figura:

Temos aí representadas três partes iguais de uma unidade que foi dividida em 4 partes iguais. Logo esta fração $\frac{3}{4}$ é menor que a unidade. Ela é chamada de **fração própria.**

As frações que representam uma ou mais partes iguais de **uma unidade,** isto é, as frações que são menores do que 1, chamamos **frações próprias.**

Então:

$\frac{8}{9}$  $\frac{3}{5}$ 

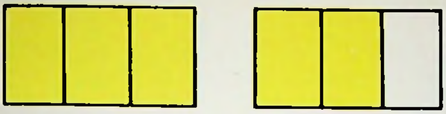
$\frac{1}{2}$  são frações próprias

Para reconhecermos uma **fração própria** basta observar seus termos: seu numerador será sempre **menor do que** seu denominador.

Logo:

$\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ são **frações próprias.** Repare que os numeradores das frações citadas são menores do que os denominadores.

Observemos a figura:



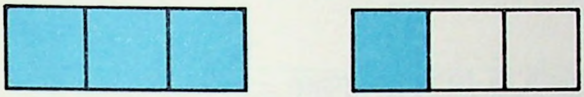
Temos aí representado duas unidades divididas em três partes iguais cada uma. Tomamos cinco dessas partes.

Logo esta fração $\frac{5}{3}$ é maior do que a unidade.

Ela é chamada **fração imprópria.**

São chamadas frações impróprias as que representam:
— uma unidade ou
— certo número de partes iguais de mais de uma unidade.

Então:

$\frac{4}{3}$ 

$\frac{5}{5}$  são **frações impróprias.**

As frações impróprias são, portanto, maiores ou iguais a 1.

Podemos reconhecer uma fração imprópria observando seus termos: seu numerador será sempre **maior ou igual** ao seu denominador.

Logo: $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{8}{4}$ são frações impróprias.

Às frações impróprias que representam números naturais chamamos **frações aparentes.**

Exemplos:

$\frac{6}{2}$ que representa o número natural 3 é uma **fração aparente.**

$\frac{7}{7}$ que representa o número natural 1 é uma **fração aparente.**

Todas as frações impróprias, que não representam um número natural, podem ser escritas sob uma **forma mista.**

Exemplos:

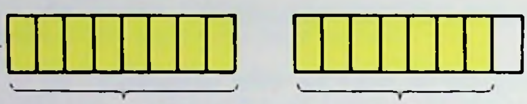
$\frac{10}{4}$ é uma fração imprópria que representa a figura acima.

Observando a figura notamos que temos 2 unidades e mais uma parte da unidade.

Temos, então, $2\dfrac{2}{4}$

parte inteira — parte fracionária

$2\dfrac{2}{4}$ lê-se: dois inteiros e dois quartos.



1 $\qquad \dfrac{7}{8}$

$\dfrac{15}{8}$ é o mesmo que $1\dfrac{7}{8}$

$1\dfrac{7}{8}$ é a forma mista da fração imprópria $\dfrac{15}{8}$

$\dfrac{15}{8}$ e $1\dfrac{7}{8}$ são numerais diferentes do mesmo número (idéia).

Logo: $\dfrac{15}{8} = 1\dfrac{7}{8}$ lê-se: um inteiro e sete oitavos.

Podemos, ao querermos escrever uma fração imprópria sob sua forma mista, usar um processo mais rápido, como veremos nos exemplos a seguir:

→ $\dfrac{16}{3}$ Vamos dividir o numerador pelo denominador da fração (extrair os inteiros). O quociente obtido será a parte inteira, isto é, quantas **unidades** temos na fração. O resto da divisão, isto é, o número de partes que sobraram, será o numerador da parte fracionária.

Como cada unidade foi dividida em três partes iguais, o denominador da parte fracionária será 3, que é o denominador da fração imprópria.

numerador $\qquad$ denominador

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

numerador da parte fracionária $\qquad$ parte inteira

Então: $\dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}$

→ $\dfrac{8}{5} = 1\dfrac{3}{5}$ pois

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

numerador da fração $\qquad$ parte inteira

Inversamente, sempre que uma fração for apresentada em sua forma mista, podemos escrevê-la sob a forma de fração imprópria.

Exemplos:

$$2\frac{1}{6} = \frac{13}{6} \qquad 2\frac{1}{6}\begin{cases}\text{numerador: } 2 \times 6 + 1 = 13\\ \text{denominador: } 6\end{cases}$$

Usando a operação inversa:

Se $\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ então $2 \times 6 + 1 = 13$

$$3\frac{4}{7} = \frac{25}{7} \qquad \begin{cases}\text{numerador da fração imprópria: } 3 \times 7 + 4 = 25\\ \text{denominador da fração imprópria: } 7\end{cases}$$

$$8\frac{2}{5} = \frac{42}{5} \qquad \begin{cases}\text{numerador da fração imprópria: } 8 \times 5 + 2 = 42\\ \text{denominador da fração imprópria: } 5\end{cases}$$

Lembrando:

- As frações cujos denominadores são potências de 10 são chamadas **frações decimais.** As demais, **frações ordinárias.**
- As **frações próprias** são menores do que a unidade. O numerador de uma fração própria é sempre menor do que seu denominador.
- As **frações impróprias** são maiores ou iguais à unidade. O numerador de uma fração imprópria é sempre maior ou igual ao seu denominador.
- **Frações aparentes** são frações impróprias que representam números naturais.

Frações equivalentes, simplificação

Vamos considerar as frações: $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$

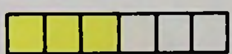
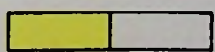
$\frac{2}{5}$  $\frac{4}{10}$ 

Verificamos que as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ representam a mesma quantidade. Neste caso dizemos que essas frações são **equivalentes,** pois representam o mesmo número racional.

$\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ são numerais diferentes do mesmo número (idéia).

Por isso escrevemos: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Consideremos agora, as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$:

$\frac{3}{6}$  $\frac{1}{2}$ 

$\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ são frações equivalentes. Logo: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Observando melhor os exemplos dados:

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{4}{10} \qquad\qquad \frac{3}{6} \text{ e } \frac{1}{2}$$

notamos que: 4 é múltiplo de 2 pois $4 = 2 \times 2$
10 é múltiplo de 5 pois $10 = 5 \times 2$

Assim como: 3 é múltiplo de 1 pois $3 = 1 \times 3$
6 é múltiplo de 2 pois $6 = 2 \times 3$

No primeiro exemplo obtivemos uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$, multiplicando seu numerador e denominador por 2.

$$\frac{2}{5} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{10}$$

No segundo exemplo obtivemos uma fração equivalente a $\frac{3}{6}$, dividindo seu numerador e denominador por 3.

$$\frac{3}{6} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{1}{2}$$

Como achar, então, frações equivalentes a uma fração dada?

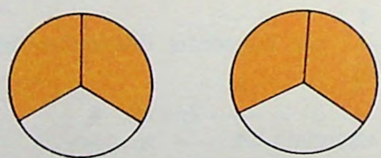
→ Procuremos frações equivalentes a $\frac{2}{3}$

Vamos multiplicar os dois termos por 1:

$$\frac{2}{3} \underset{\times 1}{\overset{\times 1}{=}} \frac{2}{3}$$

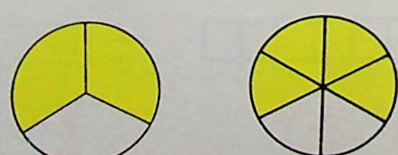
$\frac{2}{3}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$

Logo: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$



Multiplicando os dois termos por 2:

$$\frac{2}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{6}$$



Obtivemos $\frac{4}{6}$ que é uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$

Multiplicando, agora, os dois termos por 3.

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{6}{9}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$\frac{6}{9}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$

Poderíamos continuar multiplicando os dois termos por 4, 5, 6 etc...

obtendo desta forma frações equivalentes a $\frac{2}{3}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{6}{9}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{10}{15} \quad \ldots$$

Note que não podemos multiplicar os dois termos por **zero** pois resultaria como denominador da fração **zero.**

→ Procuremos, agora, frações equivalentes a $\frac{6}{8}$

Notamos que neste caso os termos da fração dada têm um divisor comum: 6 e 8 são divisíveis por 2.

Dividimos os termos da fração $\frac{6}{8}$ por 2.

$$\frac{6}{8} \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Obtivemos a fração $\frac{3}{4}$ que é uma fração equivalente a $\frac{6}{8}$

Podemos encontrar algumas frações equivalentes a $\frac{3}{4}$. Todas estas frações serão também equivalentes a $\frac{6}{8}$

Temos então:

$\{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots\}$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{12}{16} \quad \ldots$$

são frações equivalentes a $\frac{6}{8}$

Concluímos que:

> Para encontrar frações equivalentes a uma fração dada, basta: multiplicar ou dividir os dois termos da fração por um número natural, diferente de zero.

Assim:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 1} \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{4}, \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{6}$$

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são frações equivalentes.

$$\frac{6}{9} \xrightarrow{\div 3} \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$ é uma fração equivalente a $\frac{6}{9}$

Sabemos que quando dividimos os termos de uma fração dada por um número natural, obtemos uma fração equivalente e de termos, respectivamente, menores.

Exemplo:

$$\frac{12}{16} \xrightarrow{\div 2} \frac{6}{8} \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{4}$$

$\frac{6}{8}$ é uma fração equivalente a $\frac{12}{16}$ e seus termos são, respectivamente, menores do que os termos da fração $\frac{12}{16}$, assim como:

$\frac{3}{4}$ é uma fração equivalente a $\frac{6}{8}$ e seus termos são, respectivamente, menores do que os termos da fração $\frac{6}{8}$

Quando procuramos frações equivalentes dividindo os seus termos pelo mesmo número podemos dizer que estamos **simplificando** a fração dada.
Em outras palavras, **simplificar** uma fração é procurar um numeral mais simples para representar esta fração.

Exemplo:

→ Vamos simplificar a fração $\frac{6}{18}$

$$\frac{6}{18} \xrightarrow[\div 2]{\div 2} \frac{3}{9} \xrightarrow[\div 3]{\div 3} \frac{1}{3} \qquad \text{ou} \qquad \frac{6}{18} \xrightarrow[\div 6]{\div 6} \frac{1}{3}$$

Simplificando a fração $\frac{6}{18}$ chegamos à fração $\frac{1}{3}$. Esta fração não pode ser mais simplificada pois 1 e 3 não têm divisores comuns diferentes de 1 (1 e 3 são primos entre si).

Quando uma fração não pode ser mais simplificada, diz-se que é uma **fração irredutível.**

Exemplo:

→ $\frac{2}{5}$ é uma **fração irredutível** pois 2 e 5 são primos entre si, isto é, só admitem como divisor comum o 1.

Assim como:

$\frac{3}{10}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{2}{9}$ são frações irredutíveis.

Vamos simplificar algumas frações tornando-as irredutíveis:

→ $$\frac{6}{42} \xrightarrow[\div 2]{\div 2} \frac{3}{21} \xrightarrow[\div 3]{\div 3} \frac{1}{7}$$

$\frac{1}{7}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{6}{42}$ e $\frac{1}{7}$ é o numeral mais simples para representar a fração $\frac{6}{42}$

→ $$\frac{9}{18} \xrightarrow[\div 3]{\div 3} \frac{3}{6} \xrightarrow[\div 3]{\div 3} \frac{1}{2}$$

Simplificando $\frac{9}{18}$ obtivemos $\frac{1}{2}$ que é uma **fração irredutível.**

Observando melhor os dois exemplos apresentados verificamos que podemos chegar mais rapidamente à fração irredutível.

Assim:

6 é o **maior divisor comum** de 42 e 6. Dividindo os termos da fração por 6 obteremos, rapidamente, a fração irredutível procurada.

$$\frac{6}{42} \xrightarrow[\div 6]{\div 6} \frac{1}{7}$$

9 é o **maior divisor comum** de 18 e 9.

$$\frac{9}{18} \xrightarrow[\div 9]{\div 9} \frac{1}{2}$$

Se dividirmos os termos de uma fração pelo seu maior divisor comum (m.d.c.) poderemos, mais rapidamente, obter a fração irredutível equivalente à fração dada.

Exemplo:

Seja a fração $\frac{24}{36}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Divisores comuns de 24 e 36: $D(24) \cap D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

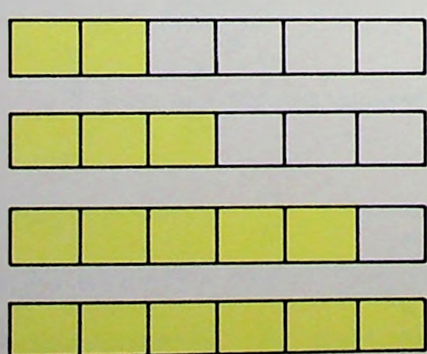
m.d.c. $(24, 36) = 12$.

$$\frac{24}{36} \xrightarrow[\div 12]{\div 12} \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{24}{36}$

Frações homogêneas

Representemos as frações: $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{6}$



$\frac{2}{6}$

$\frac{3}{6}$

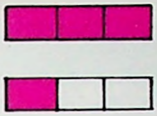
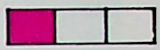
$\frac{5}{6}$

$\frac{6}{6}$

Notamos que todas as unidades foram divididas em 6 partes iguais, pois os seus denominadores são iguais a 6.

Quando as frações têm o mesmo denominador dizemos que elas são **frações homogêneas.**

Exemplos:

$\frac{2}{3}$  $\frac{4}{3}$  $\frac{1}{3}$ 

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$ são frações homogêneas.

Observe que elas têm o mesmo denominador.

 $\frac{2}{5}$  $\frac{4}{6}$  $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{5}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{1}{4}$ não são frações homogêneas.

No estudo feito com números racionais absolutos teremos necessidade de trabalhar com frações homogêneas em vários assuntos: algumas operações, desigualdade etc. . ., como veremos a seguir.

Concluindo:

Duas ou mais **frações** são **homogêneas** quando elas têm o **mesmo denominador.**

ESTRUTURA DE ORDEM

Igualdade de números racionais absolutos (naturais ou fracionários)

Sabemos que frações equivalentes representam a mesma quantidade.

Frações equivalentes são numerais diferentes do mesmo número (idéia).

Logo, podemos afirmar que dois números racionais absolutos são iguais sempre que forem representados por frações equivalentes.

Exemplos:

$\frac{2}{4}$ é equivalente a $\frac{4}{8}$

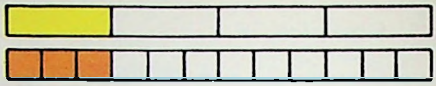
$\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são numerais diferentes do **mesmo número.**

Logo: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

$\frac{3}{5}$ é equivalente a $\frac{6}{10}$

$\frac{1}{4}$ é equivalente a $\frac{3}{12}$

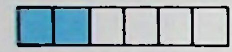
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$



Desigualdade de números racionais absolutos (naturais ou fracionários).

Vamos comparar frações homogêneas:

$\frac{2}{6}$ e $\frac{5}{6}$

 $\rightarrow \frac{2}{6}$

 $\rightarrow \frac{5}{6}$

Notamos que $\frac{2}{6}$ e $\frac{5}{6}$ não representam a mesma quantidade.

Logo: $\frac{2}{6} \neq \frac{5}{6}$ lê-se: (diferente de)

Verificamos, facilmente, que:

$\frac{5}{6} > \frac{2}{6}$ (lê-se: cinco sextos é **maior que** dois sextos).

$\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{4}$

 $\frac{2}{4}$

 $\frac{3}{4}$

 $\frac{4}{4}$

Observando os desenhos, podemos afirmar que:

$\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ (lê-se: dois quartos é **menor do que** três quartos)

$\frac{4}{4} > \frac{2}{4}$ (lê-se: quatro quartos é **maior do que** dois quartos)

$\frac{4}{4} \neq \frac{3}{4}$ (lê-se quatro quartos **é diferente de** três quartos).

Após variados exemplos com frações homogêneas o aluno poderá ser levado a concluir que:

> Quando comparamos **frações homogêneas,** isto é, frações que têm o mesmo denominador, podemos afirmar que a **maior** fração será a que tiver o **maior numerador.**

Se tivéssemos o seguinte problema a resolver:

Lúcia comeu $\frac{2}{6}$ de um bolo e Maria $\frac{1}{10}$ deste mesmo bolo.

Quem comeu mais?

Temos que **comparar** as frações que representam as partes tiradas por cada uma: $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{10}$

Observe que: $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{10}$ não são frações homogêneas porque não têm o mesmo denominador.

Poderíamos compará-las facilmente se fossem frações homogêneas.

Vamos, então, torná-las frações homogêneas, reduzindo as frações ao mesmo denominador. Para isto, basta encontrar frações equivalentes às frações dadas, que tenham o mesmo denominador.

Logo, precisamos encontrar frações equivalentes a $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{10}$ que tenham o mesmo denominador.

Temos que verificar os **múltiplos comuns** de 6 e 10.

Vamos, então, fazer a interseção do conjunto de múltiplos de 6 e do conjunto de múltiplos de 10:

$$M(6) \cap M(10) = \{0, 30, 60, \ldots\}$$

Não podemos usar como denominador o zero pois as frações têm que ter sempre o denominador diferente de zero.

A fim de se evitar frações com termos muito grandes, usaremos o menor denominador possível, isto é, o denominador será o menor múltiplo comum dos denominadores. Logo será o m.m.c. de 6 e 10.

m.m.c. (6, 10) = 30

$$\frac{2}{6} \quad \frac{}{30} \qquad 6 \xrightarrow{\times 5} 30 \qquad\qquad \frac{1}{10} \quad \frac{}{30} \qquad 10 \xrightarrow{\times 3} 30$$

Para que as frações não se alterem, teremos que multiplicar os numeradores respectivamente por 5 e 3.

Então $\frac{2}{6} = \frac{10}{30}$ ($2 \xrightarrow{\times 5} 10$, $6 \xrightarrow{\times 5} 30$) $\qquad \frac{1}{10} = \frac{3}{30}$ ($1 \xrightarrow{\times 3} 3$, $10 \xrightarrow{\times 3} 30$)

$\frac{10}{30}$ e $\frac{3}{30}$ são frações homogêneas e são equivalentes às frações dadas.

Agora já podemos comparar: $\frac{10}{30}$ e $\frac{3}{30}$

Podemos afirmar que a **maior** fração será a que tiver **maior numerador.**

Logo: $\frac{10}{30} > \frac{3}{30}$

E como estas são respectivamente equivalentes às frações dadas, vem:

$\frac{2}{6} > \frac{1}{10}$ Então: Lúcia comeu mais do que Maria.

Já sabemos então comparar frações não homogêneas.

Por exemplo:

Comparemos $\dfrac{2}{8}$ e $\dfrac{3}{4}$

Primeiro, reduzimos ao menor denominador comum.

Como o menor denominador comum é o mínimo múltiplo comum dos denominadores, procuramos o m.m.c. (8, 4).

Como 8 é divisível por 4:

m.m.c (8, 4) = 8

O menor denominador comum é 8.

Procuremos as frações equivalentes a $\dfrac{2}{8}$ e $\dfrac{3}{4}$ cujo denominador é 8.

$$\frac{2}{8} \overset{\times 1}{=} \frac{2}{8} \qquad\qquad \frac{3}{4} \overset{\times 2}{=} \frac{6}{8}$$

Vamos comparar: $\dfrac{2}{8}$ e $\dfrac{6}{8}$

$$\frac{6}{8} > \frac{2}{8}$$

Logo:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{8}$$

O que foi feito para reduzir ao mesmo denominador?

Por exemplo:

→ Vamos tornar homogêneas (reduzir ao mesmo denominador) as frações:

$$\frac{3}{10};\quad \frac{2}{4};\quad \frac{1}{5}$$

a) primeiro determinamos o m.m.c. dos denominadores.

m.m.c. (10, 4, 5)

M (10) = $\{0, 10, 20, 30, \ldots\}$

M (4) = $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$

M (5) = $\{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

Múltiplos comuns de 10, 4 e 5: M (10) $\cap$ M (4) $\cap$ M (5) $= \{0, 20, 40, \ldots\}$

m.m.c. (10, 4, 5) = 20

(b) Dividimos o novo denominador, que é 20, pelos denominadores das frações.

$20 \div 10 = 2$
$20 \div 4 = 5$
$20 \div 5 = 4.$ Quando fazemos isto, estamos sabendo por qual número multiplicamos cada denominador das frações dadas, para obter o múltiplo 20.

$$\overset{2}{\frac{3}{10}} \qquad \overset{5}{\frac{2}{4}} \qquad \overset{4}{\frac{1}{5}}$$

$$\div \qquad \div \qquad \div$$

$$\frac{\quad}{20} \qquad \frac{\quad}{20} \qquad \frac{\quad}{20}$$

A fim de facilitar o cálculo, podemos colocar o número encontrado, como aparece no exemplo.

(c) Multiplicamos os números encontrados no item b, isto é, 2, 5 e 4, pelos respectivos numeradores, para que a nova fração não fique alterada. Lembre-se que esta nova fração é equivalente à anterior.

$$\overset{2\ \times}{\frac{3}{10}}, \qquad \overset{5\ \times}{\frac{2}{4}}, \qquad \overset{4\ \times}{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{6}{20} \qquad \frac{10}{20} \qquad \frac{4}{20}$$

→ Sejam as frações: $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{6}{10}$

Vamos reduzi-las ao mesmo denominador:

m.m.c. $(7, 7, 10) = ?$

7 e 10 são primos entre si.

Logo: m.m.c. $(7, 7, 10) = 70$ (produto de 7 por 10.)

$$\overset{10\ \times}{\frac{3}{7}}, \qquad \overset{10\ \times}{\frac{1}{7}}, \qquad \overset{7\ \times}{\frac{6}{10}}$$

$$\div \qquad \div \qquad \div$$

$$\frac{30}{70}, \qquad \frac{10}{70}, \qquad \frac{42}{70}$$

Poderemos, agora, comparar estas frações:

$$\frac{42}{70} > \frac{30}{70} \text{ e } \frac{30}{70} > \frac{10}{70} \qquad \text{Logo:} \qquad \frac{6}{10} > \frac{3}{7} \text{ e } \frac{3}{7} > \frac{1}{7}$$

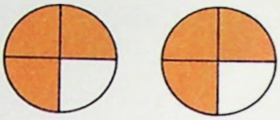
Concluindo:

> Quando comparamos frações não homogêneas, reduzimos ao mesmo denominador e comparamos as frações homogêneas obtidas.

Ainda trabalhando com a relação de desigualdade:

Observamos que a sentença

$\frac{3}{4} > \frac{3}{4}$ é falsa, pois $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$



Assim como:

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ e $\frac{6}{7} < \frac{6}{7}$ são sentenças falsas.

Logo cada número racional absoluto não é menor do que ele mesmo.

Sabemos que: $\frac{3}{6} < \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$.

E também podemos afirmar que:

$\frac{3}{6} < \frac{3}{4}$ é uma sentença verdadeira.

Temos:

$\frac{3}{6} < \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ então $\frac{3}{6} < \frac{3}{4}$,

NOTA: O que analisamos para a relação da desigualdade $<$ (menor que), verifica-se também para a relação $>$ (maior do que).

Exemplos:

$\longrightarrow$ $\frac{1}{3} < \frac{3}{3}$ e $\frac{3}{3} < \frac{5}{3}$ podemos afirmar que $\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$

Podemos então escrever a dupla desigualdade:

$\frac{1}{3} < \frac{3}{3} < \frac{5}{3}$ que indica estarem os números racionais absolutos $\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}$ dispostos em **ordem crescente**, isto é do menor para o maior.

$\longrightarrow$ Se $\frac{6}{9} > \frac{3}{9}$ e $\frac{3}{9} > \frac{1}{9}$

Podemos, então, escrever outra dupla desigualdade:

$\frac{6}{9} > \frac{3}{9} > \frac{1}{9}$ que indica estarem os números $\frac{6}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}$ dispostos em **ordem decrescente**.

Relação de ordem no conjunto dos números racionais absolutos

Deste modo podemos verificar exatamente quando um número vem antes ou depois de outro número. Para isso basta verificar se ele é:

"maior" ou "menor"

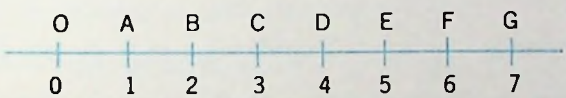
Exemplo:

$\dfrac{2}{6} < \dfrac{5}{6}$ logo $\dfrac{2}{6}$ **vem antes** de $\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{8}{9} > \dfrac{6}{9}$ logo $\dfrac{8}{9}$ **vem depois** de $\dfrac{6}{9}$

Para sentir melhor esta ordem, podemos representar os números racionais absolutos sobre uma Reta Numerada. Já sabemos representar alguns números racionais absolutos:

Os números naturais

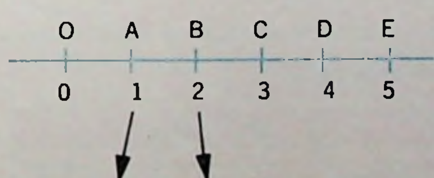


Vamos na reta numerada, com alguns números racionais absolutos representados, localizar os números:

$\dfrac{5}{5}, \dfrac{8}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{13}{6}$

1) Sabemos que $\dfrac{5}{5}$ e $\dfrac{8}{4}$ identificam-se, respectivamente, com os números naturais 1 e 2.

Temos então:



$\dfrac{5}{5}$ $\dfrac{8}{4}$

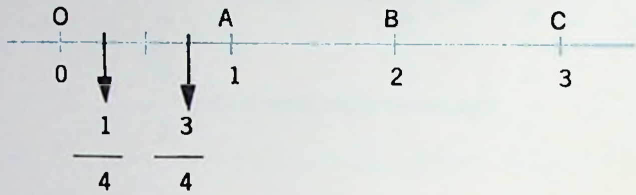
Note que:

$\dfrac{5}{5} < \dfrac{8}{4}$ logo $\dfrac{5}{5}$ vem antes de $\dfrac{8}{4}$.

Sabemos que $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ representam partes de uma unidade, logo $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ são menores do que 1.

Daí, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ vêm antes de 1.

Temos então:



Note que:

$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ logo $\frac{1}{4}$ vem antes de $\frac{3}{4}$.

Para representar $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, dividimos a parte da reta entre zero e 1 em quatro partes iguais e marcamos a fração de acordo com o numerador.

Sabemos que $\frac{13}{6}$ é uma fração imprópria.

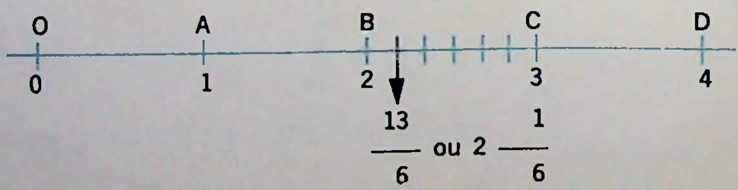
Vamos representar $\frac{13}{6}$ sob a forma mista:

$$\frac{13}{6} = 2\,\frac{1}{6}$$

Logo: $\frac{13}{6}$ é maior do que 2.

$\frac{13}{6}$ vem depois do 2.

Temos então:



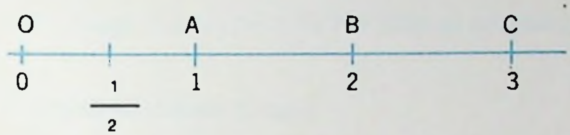
Note que: $\frac{13}{6} < 3$ $\left(\frac{13}{6}\right.$ é menor que 3)

Metade, terça parte, quarta parte etc.

Vamos, agora, representar as frações: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

Sabemos que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... são menores do que 1. Logo, estes números racionais, representados na reta numerada vêm antes de 1.

$\frac{1}{2}$



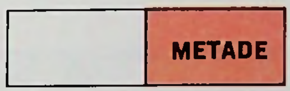
Dividimos a parte da reta entre zero e 1 em 2 partes iguais e tomamos uma parte para a direita, partindo do zero.

Quando dividimos um inteiro (objeto, figura, número etc...) em duas partes iguais, cada uma destas partes é a **metade** do inteiro que foi considerado.

Então, a fração que indica a **metade** é $\frac{1}{2}$

$1 \longrightarrow$ número de partes tomadas.

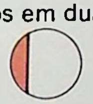
$2 \longrightarrow$ total de partes iguais.



A palavra **metade** já deve fazer parte do vocabulário do aluno.

No entanto, é conveniente que o professor desperte o aluno para observar que:

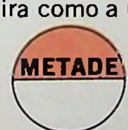
- Nem todos os objetos partidos em duas partes estão divididos em metades.

Exemplo:  e  não estão divididos em metades.

As partes resultantes da divisão devem ser **iguais** para que tenhamos metades.

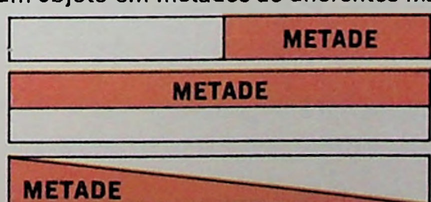
Só temos fração quando estas partes são iguais.

- A forma e o tamanho da metade dependem da forma, do tamanho da unidade e da maneira como a unidade foi dividida.



- Podemos dividir um objeto em metades de diferentes maneiras.

Exemplo:



- Duas metades juntas formam um inteiro.

Tendo a noção de **metade** vamos responder algumas perguntas:

→ Qual a metade de 6?

A metade de 6 é 3 pois $6 \div 2 = 3$

→ Qual a metade de 64?

$$\begin{array}{l|l} 6'4' & 2 \\ \hline 0\,4 & 32 \\ \;\,0 & \end{array}$$

Logo: A metade de 64 é 32.

→ Quanto é $\frac{1}{2}$ de 50?

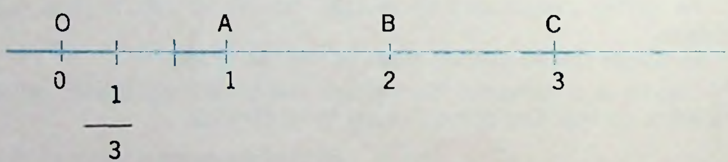
$50 \div 2 = 25$

Logo: $\frac{1}{2}$ de 50 (metade de 50) é 25.

→ Qual a metade de uma dezena?

A metade de uma dezena é meia dezena.

Sabemos que $\frac{1}{3}$ é menor que 1.

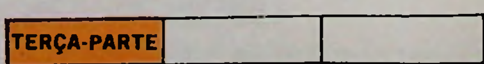


Dividimos a parte da reta entre **zero** e **1** em 3 partes iguais e tomamos uma parte para a direita, partindo do zero.

Quando dividimos um inteiro (objeto, figura, número, etc.) em três partes iguais, cada uma destas partes é a **terça parte** do que foi considerado.

Então, a fração que indica a **terça parte** é $\frac{1}{3}$.

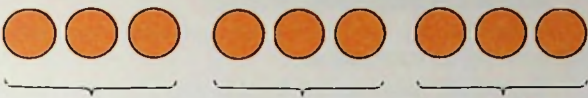
$\frac{1}{3}$ 1 → número de partes tomadas.
3 → total de partes iguais.



As observações feitas (quanto ao tamanho, forma etc.) sobre a noção metade, valem também para a noção terça parte.

Tendo a noção de **terça parte** vamos responder a algumas perguntas:

Qual a terça parte de 9?



A terça parte de 9 é 3 pois $9 \div 3 = 3$

→ Qual a terça parte de 36?

$$\begin{array}{l|l} 36 & 3 \\ \cline{2-2} 06 & 12 \\ \ 0 & \end{array}$$

Logo: A terça parte de 36 é 12.

→ Quanto é $\frac{1}{3}$ de 36?

$36 \div 3 = 12$ Logo: $\frac{1}{3}$ de 36 (terça parte de 36) é 12.

A noção de metade e terça parte podem ser estendidas para novas noções:

quarta parte ———— a fração que indica é $\frac{1}{4}$

quinta parte ———— a fração que indica é $\frac{1}{5}$

Assim por diante.

NOTA:

- "ser dobro de" é o inverso de "ser metade de"

  10 é o dobro de 5 $\Longleftrightarrow$ 5 é metade de 10.

  18 é o dobro de 9 $\Longleftrightarrow$ 9 é metade de 18.

- "ser triplo de" é o inverso de "ser terça parte de"

  12 é o triplo de 4 $\Longleftrightarrow$ 4 é a terça parte de 12.

- "ser quádruplo de" é o inverso de "ser quarta parte de"

  20 é o quádruplo de 5 $\Longleftrightarrow$ 5 é a quarta parte de 20.

Assim por diante.

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

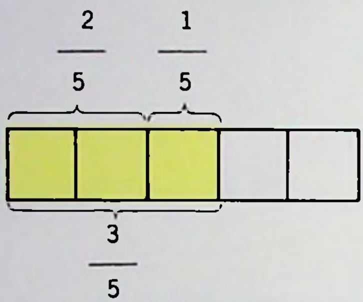
Sabemos que as frações são numerais que representam números naturais e números fracionários.

Em outras palavras, as frações representam números racionais absolutos.

Vamos agora operar com estes números racionais absolutos e para facilitar chamaremos de frações (numerais que os representam).

Adição de frações

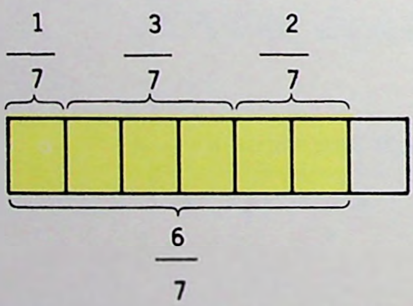
→ Observemos as frações: $\dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{1}{5}$



Pelo desenho, verificamos que se adicionarmos $\dfrac{2}{5}$ a $\dfrac{1}{5}$ obteremos $\dfrac{3}{5}$

Assim: $\underset{\text{parcela}}{\dfrac{2}{5}} + \underset{\text{parcela}}{\dfrac{1}{5}} = \underset{\text{soma}}{\dfrac{3}{5}}$

→ E se quisermos adicionar $\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{2}{7}$?



A fração obtida foi $\dfrac{6}{7}$ isto é,

$$\underset{\text{parcela}}{\dfrac{1}{7}} + \underset{\text{parcela}}{\dfrac{3}{7}} + \underset{\text{parcela}}{\dfrac{2}{7}} = \underset{\text{soma}}{\dfrac{6}{7}}$$

Pelos exemplos dados, você já deve ter notado que escolhemos apenas frações com mesmo denominador, isto é, frações homogêneas.

$\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$ ⟶ mesmo denominador 5

$\dfrac{1}{7} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{7}$ ⟶ mesmo denominador 7

O resultado (soma) encontrado em cada uma das adições foi obtido adicionando-se os numeradores e repetindo o denominador que é comum.

Assim:

soma dos numeradores

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

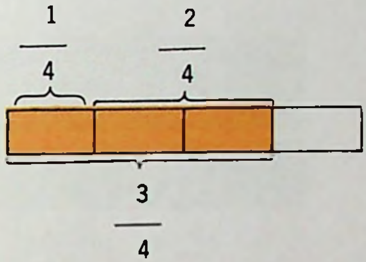
mesmo denominador

Observe que, ao adicionarmos números racionais absolutos, a soma (resultado) é um número racional absoluto.

$$\underbrace{\frac{1}{7}}_{\text{racional absoluto}} + \underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{racional absoluto}} + \underbrace{\frac{2}{7}}_{\text{racional absoluto}} = \underbrace{\frac{6}{7}}_{\text{racional absoluto}}$$

Veremos então alguns outros exemplos:

→ $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = ?$



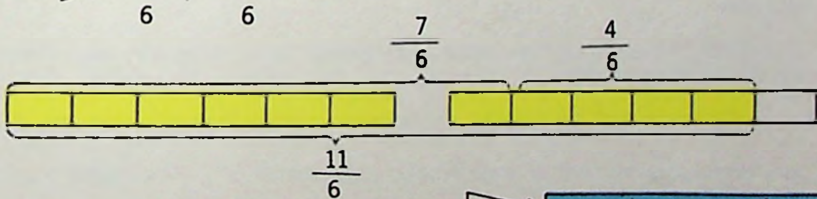
Notando que as frações têm o mesmo denominador, podemos dizer:

soma dos numeradores

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

mesmo denominador

→ $\frac{7}{6} + \frac{4}{6} = ?$



soma dos numeradores

$$\frac{7}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{6}$$

mesmo denominador

Podemos dar o resultado também sob a forma mista: $\frac{11}{6}$ ou $1\frac{5}{6}$

Então poderíamos dizer que o resultado da adição de $\frac{7}{6} + \frac{4}{6}$ é $\frac{11}{6}$ ou $1\frac{5}{6}$

$$\longrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{16}{2}$$

Mas $\dfrac{16}{2} = 8$

Neste caso adicionamos números racionais absolutos e encontramos como resultado um número natural que também é um número racional absoluto.

$$\text{Então: } \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}}_{\text{racionais absolutos}} = \underbrace{8}_{\text{racional absoluto}}$$

Concluindo:

> Para adicionarmos duas ou mais frações homogêneas (mesmo denominador), basta adicionarmos os numeradores e repetirmos o denominador.

> Sempre que adicionarmos dois ou mais números racionais absolutos, a soma será um número racional absoluto.

E se tivermos agora frações com denominadores diferentes?

$\longrightarrow$ Como adicionar $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{4}{5}$?

$\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{4}{5}$

Você percebe que não podemos, imediatamente, dizer qual é a fração resultante desta adição.

Se elas tivessem o mesmo denominador, a adição seria facilmente calculada.

Devemos então transformar cada fração dada, para que elas fiquem com o mesmo denominador.

Mas para que as frações continuem representando a mesma quantidade, temos que encontrar uma fração equivalente a $\dfrac{2}{3}$ e outra fração equivalente a $\dfrac{4}{5}$ (com um mesmo denominador). O menor denominador comum é o m.m.c. de 3 e 5.

$$\text{m.m.c.}\ (3, 5) = 15$$

$$\frac{2 \xrightarrow{\times 5} 10}{3 \xrightarrow[\times 5]{} 15} \qquad\qquad \frac{4 \xrightarrow{\times 3} 12}{5 \xrightarrow[\times 3]{} 15}$$

Assim: $\dfrac{10}{15}$ é equivalente a $\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{12}{15}$ é equivalente a $\dfrac{4}{5}$

e $\dfrac{10}{15}$ e $\dfrac{12}{15}$ possuem o mesmo denominador.

Agora já podemos adicionar: $\dfrac{10}{15} + \dfrac{12}{15} = \dfrac{22}{15}$ $\boxed{\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{22}{15}}$

Vejamos a mesma situação, em outros exemplos:

$\longrightarrow \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{2} = ?$ Os denominadores dados são: 4, 6 e 2.

Devemos transformar as frações dadas em frações equivalentes para que fiquem com o mesmo denominador.

Procuramos assim o **menor denominador comum.** Isto é feito calculando-se:

m.m.c. (4, 6, 2) $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$

$M(6) = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$

$M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

Múltiplos comuns de 4, 6 e 2: $M(4) \cap M(6) \cap M(2) = \{0, 12, 24, \ldots\}$

m.m.c. (4, 6, 2) = 12

Vamos escrever as frações $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{5}{6}$ e $\dfrac{3}{2}$ de maneira tal, que cada uma delas fique com denominador 12. Isto é, vamos procurar frações equivalentes a cada uma delas, todas com denominador 12.

Assim:

$\dfrac{1}{4} \xrightarrow{\times 3} \dfrac{3}{12}$ Devo multiplicar por 3, pois $4 \times 3 = 12$

$\dfrac{5}{6} \xrightarrow{\times 2} \dfrac{10}{12}$ Multiplico por 2, pois $6 \times 2 = 12$

$\dfrac{3}{2} \xrightarrow{\times 6} \dfrac{18}{12}$ Multiplico por 6, pois $2 \times 6 = 12$

Agora, fazendo a correspondência:

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{2} = ?$ $\dfrac{3}{12} + \dfrac{10}{12} + \dfrac{18}{12} = \dfrac{31}{12}$

Como $\dfrac{31}{12} = 2\,\dfrac{7}{12}$, então: $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{2} = 2\,\dfrac{7}{12}}$

$$\rightarrow \frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6} = ?$$

m.m.c. (3, 8, 6)

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$$
$$M(8) = \{0, 8, 16, 24, \ldots\}$$
$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$$

Múltiplos comuns de 3, 8 e 6: $M(3) \cap M(8) \cap M(6) = \{0, 24, 48, \ldots\}$

m.m.c. (3, 8, 6) = 24

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6} = ?$$

(8) (3) (4)

$$\frac{8}{24} + \frac{9}{24} + \frac{20}{24} = \frac{37}{24}$$

Como $\frac{37}{24} = 1\,\frac{13}{24}$ então: $\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6} = 1\,\frac{13}{24}$

$$\rightarrow \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \quad ?$$

Sabemos que m.m.c. (6, 3) = 6, pois 6 é divisível por 3.

Então:

(1) (2)

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = ?$$

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} = 1\,\frac{1}{6}$$

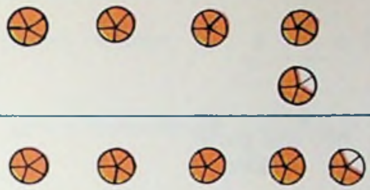
Então: $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 1\,\frac{1}{6}$

Concluindo:

Para adicionarmos frações com denominadores diferentes, devemos antes reduzi-las ao mesmo denominador, tornando-as homogêneas.

Ainda adicionando números racionais absolutos, vejamos, através de exemplos, como adicionar números fracionários com números naturais.

$$4 + \frac{3}{5} = ?$$



$4 + \frac{3}{5}$

$4 \frac{3}{5}$

Como efetuar? Sabemos que $4 = \frac{4}{1}$

Podemos então escrever: $\frac{4}{1} + \frac{3}{5}$

m.m.c. (5, 1) = 5, então podemos escrever:

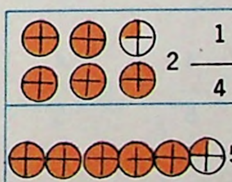
5 1

$$\frac{4}{1} + \frac{3}{5} = ?$$

$$\frac{20}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$$

Logo: $\boxed{4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}}$

$$2\frac{1}{4} + 3 = ?$$



$2\frac{1}{4} + 3$

$5\frac{1}{4}$

Temos que: $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ e $3 = \frac{3}{1}$

Então: $2\frac{1}{4} + 3 = \frac{9}{4} + \frac{3}{1}$

m.m.c. (4, 1) = 4 Então:

1 4

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{1}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

Logo: $\boxed{2\frac{1}{4} + 3 = 5\frac{1}{4}}$

Pelos exemplos dados, você deve ter observado que, quando adicionamos um número fracionário a um número natural, podemos adicionar os inteiros e em seguida acrescentar a parte fracionária.

Assim estas duas adições poderiam ser efetuadas mais rapidamente.

parte inteira — parte fracionária

$$4 + \frac{3}{5}$$

não tem parte fracionária — não tem parte inteira

Acrescentando os inteiros: $4 + 0 = 4$

Adicionando a parte fracionária: $\frac{3}{5}$

Então:

$$\boxed{4 + \frac{3}{5} = 4\,\frac{3}{5}}$$

Daí podemos afirmar sempre que:

$2 + \frac{1}{3}$ e $2\,\frac{1}{3}$

$3 + \frac{5}{9}$ e $3\,\frac{5}{9}$

$5 + \frac{2}{3}$ e $5\,\frac{2}{3}$

$6 + \frac{4}{5}$ e $6\,\frac{4}{5}$

são numerais diferentes para o mesmo número.

Também no outro exemplo:

$$2\,\frac{1}{4} + 3$$

parte inteira — parte fracionária — parte inteira não tem parte fracionária.

Adicionando os inteiros: $2 + 3 = 5$

Acrescentando a parte fracionária: $\frac{1}{4}$

Então: $2\,\frac{1}{4} + 3 = 5\,\frac{1}{4}$

→ $3\dfrac{2}{7} + 5\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{7} = ?$

Adição das partes inteiras: $3 + 5 + 0 = 8$

Adição das partes fracionárias: $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{7}$

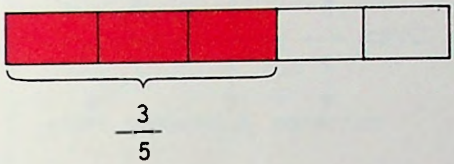
Então: $3\dfrac{2}{7} + 5\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{7} = 8\dfrac{6}{7}$

Logo:

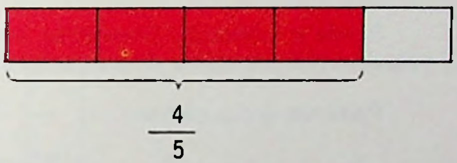
> Para adicionarmos um número fracionário a um número natural, ou para adicionarmos números fracionários sob a forma mista, devemos adicionar as partes inteiras e em seguida as partes fracionárias.

Subtração de frações

Observemos a figura:



Quanto nos falta para obter $\dfrac{4}{5}$?



Sabemos que: $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

Então:

$\dfrac{1}{5}$ é o número que se deve adicionar a $\dfrac{3}{5}$ para obter $\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{3}{5}$ é o número que se deve adicionar a $\dfrac{1}{5}$ para obter $\dfrac{4}{5}$

Daí temos que: $\dfrac{1}{5}$ é a diferença entre $\dfrac{4}{5}$ e $\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{3}{5}$ é a diferença entre $\dfrac{4}{5}$ e $\dfrac{1}{5}$

Podemos agora introduzir a subtração:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \text{ pois } \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

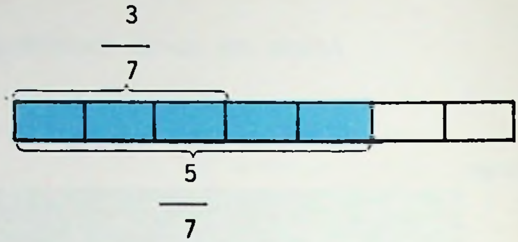
$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \text{ pois } \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Você pode observar que a subtração é a operação inversa da adição.

Como fazer então: $\dfrac{5}{7} - \dfrac{3}{7}$?

Devemos procurar o número que adicionado a $\dfrac{3}{7}$ nos dá como resultado $\dfrac{5}{7}$.

Isto é: $\square + \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{7}$



Vemos que o número procurado é $\dfrac{2}{7}$, pois $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{7}$

Então: $\dfrac{5}{7} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{2}{7}$

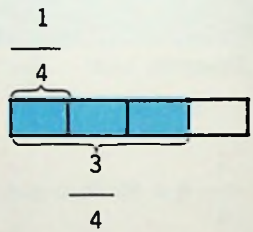
minuendo subtraendo resto

NOTA:

Sendo a subtração a operação inversa da adição, todas as técnicas de cálculo desta operação, são as mesmas da adição.

Podemos então efetuar:

→ $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4}$ pois $\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$



Você pode verificar que $\dfrac{2}{4}$ é uma fração que pode ser simplificada.

$$\frac{2 \xrightarrow{\div 2} 1}{4 \xrightarrow[\div 2]{} 2} \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Então: $\boxed{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}}$

Observação:

Sempre que o resultado de uma operação com frações puder ser simplificado, ou puder ser colocado sob a forma mista, devemos fazê-lo.

→ $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = ?$

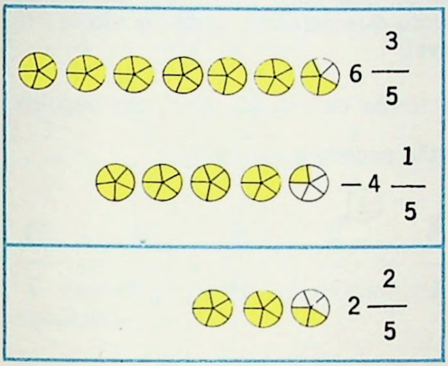
Neste caso, os denominadores são diferentes. Vamos, então, reduzir as frações ao mesmo denominador.

m. m. c. $(3, 4) = 12$

$$\text{Então: } \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12} \quad \text{Logo: } \boxed{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}}$$

$$\longrightarrow 6\,\frac{3}{5} - 4\,\frac{1}{5} = ?$$

$$6\,\frac{3}{5} - 4\,\frac{1}{5} = 2\,\frac{2}{5}$$



Devemos primeiro subtrair as partes inteiras.

Então: $6 - 4 = 2$

Depois devemos subtrair as partes fracionárias.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Então: $\boxed{6\,\frac{3}{5} - 4\,\frac{1}{5} = 2\,\frac{2}{5}}$

$$\longrightarrow 7\,\frac{2}{3} - 2\,\frac{1}{2} = ?$$

Subtraindo as partes inteiras: $7 - 2 = 5$

Subtraindo as partes fracionárias:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = ?$$

Denominadores diferentes —— redução ao menor denominador comum.

m. m. c. $(3, 2) = 6$

$$\text{Então: } \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Logo: $\boxed{7\,\frac{2}{3} - 2\,\frac{1}{2} = 5\,\frac{1}{6}}$

$$5 - \frac{2}{7} = ?$$

Neste caso não podemos subtrair separadamenete as partes inteiras e em seguida as partes fracionárias, pois teríamos:

$$5 - \frac{2}{7}$$

não tem parte fracionária.

$$0 - \frac{2}{7} = ?$$

Sabemos que esta subtração, dentro do conjunto que estamos trabalhando, é impossível.

Devemos então escrever o 5 sob a forma de fração, para em seguida subtrairmos.

$$5 = \frac{5}{1}$$

m. m. c. $(1, 7) = 7$

Então podemos escrever:

$$\frac{5}{1} - \frac{2}{7} = \frac{35}{7} - \frac{2}{7} = \frac{33}{7}$$

Como $\frac{33}{7} = 4\,\frac{5}{7}$ então:

$$\boxed{5 - \frac{2}{7} = 4\,\frac{5}{7}}$$

$$3\,\frac{1}{3} - 2 = ?$$

Subtraindo a parte inteira ⟶ $3 - 2 = 1$

Subtraindo a parte fracionária ⟶ $\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Então: $\boxed{3\,\frac{1}{3} - 2 = 1\,\frac{1}{3}}$

Você deve ter observado, através dos exemplos, que sempre o minuendo é maior que o subtraendo.

E se tivéssemos: $\frac{3}{7} - \frac{6}{7} = ?$

Você poderá verificar que não existe nenhum número racional absoluto que adicionado a $\frac{6}{7}$ vá dar como resultado $\frac{3}{7}$

$\square + \frac{6}{7} = \frac{3}{7}$ é impossível no conjunto dos racionais absolutos,

logo $\frac{3}{7} - \frac{6}{7}$ é impossível no conjunto dos racionais absolutos.

Concluímos que nem sempre podemos efetuar a subtração com dois números racionais absolutos; a subtração só é possível quando o minuendo é maior ou igual ao subtraendo.

Ainda operando com números racionais absolutos.

Observemos as adições:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

e

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

Notamos que a ordem com que adicionamos as frações não alterou o resultado.

Vejamos agora as subtrações:

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{8} = ?$$

não podemos efetuar esta operação no conjunto dos números racionais absolutos.

Logo: $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \neq \frac{3}{8} - \frac{5}{8}$

Observe as adições:

$\frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5}$ e $0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{8}{8} + 0 = \frac{8}{8}$ e $0 + \frac{8}{8} = \frac{8}{8}$

Notamos que o zero, que é um número racional absoluto, adicionado a outro racional absoluto, não altera este número.

Isto é, o resultado foi o próprio número: $\frac{3}{5} + 0 = 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

Sentenças matemáticas

Já tivemos oportunidade de sentir que muitas vezes em nosso dia-a-dia temos necessidade de resolver situações problemáticas.

Tais situações podem ser transformadas em sentenças matemáticas, o que vai nos facilitar na resolução das mesmas.

Por exemplo:

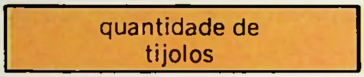
→ Para a construção de nossa igreja, o padre está necessitando de tijolos.

Ele ganhou $\frac{3}{5}$ desses tijolos do Prefeito e $\frac{1}{5}$ dos moradores do local.

a) Que parte o padre já recebeu?

b) Que parte falta para que ele possa construir toda a igreja?

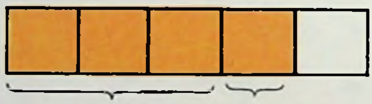
a) Observe que a quantidade de tijolos que são necessários corresponde a uma unidade.



O Prefeito doou $\frac{3}{5}$ dos tijolos.

Logo, se dividirmos a quantidade total de tijolos por 5, podemos dizer que 3 destas partes já temos.

E $\frac{1}{5}$ foi ganho dos moradores.



$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$

Então a sentença que nos dará a parte de tijolos já conseguida é:

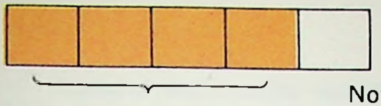
$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \square$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Logo: $\square = \frac{4}{5}$

O padre já recebeu $\frac{4}{5}$ dos tijolos que necessitava.

b) Quanto falta?



$\frac{4}{5}$

Notamos que a quantidade de tijolos que necessitamos corresponde a $\frac{5}{5}$, que é a unidade toda.

Devemos então procurar a quantidade que falta a $\frac{4}{5}$ para completar $\frac{5}{5}$

$$\frac{4}{5} + \square = \frac{5}{5}$$

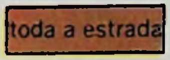
Aplicando a operação inversa da adição, que é a subtração, teremos:

$\square = \frac{5}{5} - \frac{4}{5}$. Como $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, então: $\square = \frac{1}{5}$

Logo a parte de tijolos que falta para a construção da igreja é $\frac{1}{5}$

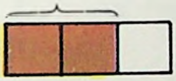
→ O grupo de trabalho já asfaltou $\frac{2}{3}$ da estrada. Que parte da estrada ainda falta ser asfaltada?

A estrada toda corresponde a uma unidade:



$\frac{2}{3}$

Parte já asfaltada:



A estrada toda corresponde a $\frac{3}{3}$

Logo devo achar a fração que falta a $\frac{2}{3}$ para completar $\frac{3}{3}$

$$\frac{2}{3} + \square = \frac{3}{3}$$

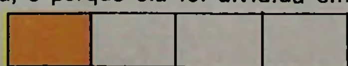
Aplicando operação inversa:

$$\square = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \qquad \square = \frac{1}{3}$$

Logo a parte da estrada que falta ser asfaltada é $\frac{1}{3}$.

→ Havia sobre a mesa uma barra de goiabada. Foi retirado $\frac{1}{4}$ para minha irmã. Quanto ainda sobrou?

Se foi retirado $\frac{1}{4}$ da barra de goiabada, é porque ela foi dividida em 4 partes iguais e tomada uma dessas partes.



$\frac{1}{4}$

A goiabada toda corresponde a $\frac{4}{4}$

Então a parte retirada adicionada à parte que sobrou deve totalizar: $\frac{4}{4}$

$$\frac{1}{4} + \square = \frac{4}{4}$$

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \square$$

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \text{Então} \quad \square = \frac{3}{4}$$

Logo a parte que sobrou é $\frac{3}{4}$ da barra de goiabada.

→ Quero atingir o topo de um morro. Percorri $\frac{2}{7}$ do percurso e em seguida $\frac{1}{7}$. Que parte falta para que o topo seja atingido?

Sabemos que:

parte percorrida + parte que falta = $\frac{7}{7}$ → percurso total

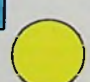
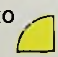
$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \square = \frac{7}{7}$$

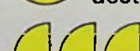
$$\frac{3}{7} + \square = \frac{7}{7}$$

Aplicando a operação inversa: $\square = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

Logo, ainda falta percorrer $\frac{4}{7}$ do percurso.

Multiplicação de frações

Observemos uma unidade  Se quisermos um quarto deste círculo, teremos:  $\frac{1}{4}$

3 vezes este pedaço  será  $\frac{3}{4}$

Tivemos então: $\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{parcelas iguais}} = \frac{3}{4}$

Como são três parcelas iguais a $\frac{1}{4}$, podemos escrever: $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Efetuamos assim, a operação multiplicação entre dois números racionais absolutos e o resultado, que é o produto, é também um número racional absoluto.

Assim: $\underbrace{3 \times \frac{1}{4}}_{\text{fatores}} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{produto}}$

Note que: $3 = \frac{3}{1}$, então posso escrever: $\frac{3}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

produto dos numeradores

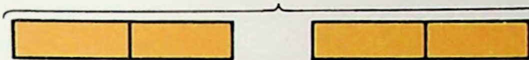
produto dos denominadores

Outros exemplos: $4 \times \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

Logo teremos:

$\frac{2}{2}$ $\frac{2}{2}$



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Então: $4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$

$\underbrace{4 \times \frac{1}{2}}_{\text{fatores}} = \underbrace{\frac{4}{2}}_{\text{produto}}$

Como $\frac{4}{2} = 2$, então: $\boxed{4 \times \frac{1}{2} = 2}$

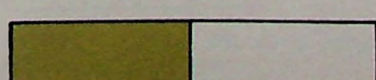
Observe ainda que multiplicamos dois racionais absolutos 4 e $\frac{1}{2}$ e encontramos o produto 2, que também é um número racional absoluto.

➡ Como determinar $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de uma barra de chocolate?

Representemos a barra de chocolate:

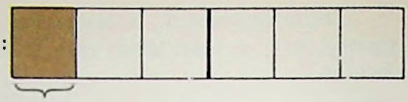
Queremos $\frac{1}{3}$ da parte $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate.

$\frac{1}{2}$ da barra de chocolate é:



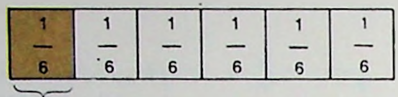
$\frac{1}{2}$ da barra de chocolate

E $\frac{1}{3}$ deste $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate é:



$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$

Que é o mesmo que:



$\frac{1}{6}$ da barra de chocolate

Vemos claramente que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ do chocolate é $\frac{1}{6}$ do chocolate.

Escrevemos então: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

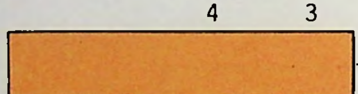
fatores produto

produto dos numeradores

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

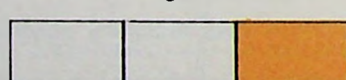
produto dos denominadores

→ Como podemos encontrar $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de um certo objeto?

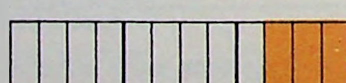


→ 1 objeto

Devo primeiro procurar $\frac{1}{3}$ do objeto para depois encontrar $\frac{3}{4}$ deste $\frac{1}{3}$ do objeto.

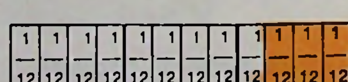


→ $\frac{1}{3}$ do objeto



→ $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ do objeto.

Que é o mesmo que:



→ $\frac{3}{12}$ do objeto

Então $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ do objeto é $\frac{3}{12}$ do objeto.

Podemos escrever:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$$

3 → produto dos numeradores

12 → produto dos denominadores

fatores: $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{3}$; produto: $\frac{3}{12}$

Você já deve ter notado, através dos exemplos vistos, que:

> Para se multiplicar números racionais absolutos (sob a forma de fração) devemos multiplicar os numeradores e multiplicar os denominadores das frações.

> Sempre que multiplicamos números racionais absolutos, o resultado (produto) é um número racional absoluto.

Outros exemplos:

→ $\frac{3}{4} \times 3$ Como $3 = \frac{3}{1}$, então teremos:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4}$$ Mas $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$,

logo $\boxed{\frac{3}{4} \times 3 = 2\frac{1}{4}}$

→ $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

Agora temos 3 fatores.

Devemos então multiplicar os 2 primeiros fatores e o resultado obtido multiplicamos pelo terceiro fator, assim:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{30}$$

Simplificando $\frac{8}{30}$ teremos:

$$\frac{8}{30} \overset{\div 2}{=} \frac{4}{15}$$

Então: $\boxed{\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}}$

→ $\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = ?$

Deveríamos multiplicar os dois primeiros fatores, depois o resultado multiplicar pelo terceiro fator, o resultado pelo quarto fator.

A fim de facilitar o trabalho podemos multiplicar todos os numeradores e depois todos os denominadores.

Teremos então:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 7 \times 4 \times 5} = \frac{24}{420}$$

Simplificando a fração obtida, teremos:

$$\frac{24}{420} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{12}{210} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{6}{105} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{2}{35}$$

ou ainda: m.d.c $(24, 420) = 12$

$$\frac{24}{420} \underset{\div 12}{\overset{\div 12}{=}} \frac{2}{35}$$

Então: $\boxed{\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{35}}$

→ $2\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times 1\frac{2}{3}$

Antes de efetuarmos a multiplicação, devemos passar os números que estão sob a forma mista para a forma de fração imprópria.

Assim: $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ e $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ Então teremos

$$\frac{13}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{13 \times 1 \times 5}{5 \times 4 \times 3} = \frac{65}{60} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

Ainda trabalhando com números racionais absolutos.

Observe as multiplicações:

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{e} \quad \frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$$

Notamos que a ordem dos fatores na multiplicação não altera o resultado (produto).

Qual é o número racional absoluto que multiplicado por um outro racional absoluto nos dá como produto este outro racional absoluto?

Exemplificando: $\square \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad \square = ?$

$$\frac{3}{5} \times \square = \frac{3}{5} \qquad \square = ?$$

Verificamos que $\square = 1$, pois $\boxed{1 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5} \text{ e } \dfrac{3}{5} \times 1 = \dfrac{3}{5}}$

Quando multiplicamos qualquer número racional absoluto por 1, encontramos no produto o próprio número.

Elemento inverso

→ Observemos as frações: $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{4}{3}$

O que obteremos ao multiplicarmos estas frações?

$\dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{12}{12} = 1$ Então: $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{3} = 1$

→ Vejamos agora: $\dfrac{7}{6}$ e $\dfrac{6}{7}$

Multiplicando: $\dfrac{7}{6} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{42}{42} = 1 \longrightarrow \dfrac{7}{6} \times \dfrac{6}{7} = 1$

Dois fatos importantes você já deve ter observado através dos exemplos e que são:

1.º) $\dfrac{3}{4} \quad \dfrac{4}{3} \qquad \dfrac{7}{6} \quad \dfrac{6}{7}$ isto é,

o numerador da 1.ª é igual ao denominador da 2.ª

o denominador da 1.ª é igual ao numerador da 2.ª

2.º) O produto encontrado foi 1.

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1 \qquad \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} = 1$$

Os números racionais absolutos $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{4}{3}$ são chamados de inversos, então:

$\dfrac{3}{4}$ é elemento inverso de $\dfrac{4}{3}$ na multiplicação como também $\dfrac{4}{3}$ é elemento inverso de $\dfrac{3}{4}$ na multiplicação.

Da mesma forma dizemos que $\frac{7}{6}$ e $\frac{6}{7}$ são números inversos ou:

$\frac{7}{6}$ é elemento inverso de $\frac{6}{7}$

como também $\frac{6}{7}$ é elemento inverso de $\frac{7}{6}$.

Outros exemplos

NÚMERO RACIONAL ABSOLUTO	ELEMENTO INVERSO	PRODUTO
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = 1$
$\frac{2}{9}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{9} \times \frac{9}{2} = 1$
$\frac{0}{7}$	não há	? ? ?
$\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

$\frac{0}{7}$ não tem elemento inverso, pois já sabemos que $\frac{7}{0}$ é impossível.

Daí podemos dizer que qualquer número racional absoluto terá elemento inverso se o numerador e o denominador forem diferentes de zero.

Divisão de frações

Observe a sentença matemática:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \square$$

Para procurar o valor de $\square$ devemos efetuar a divisão.
Você já sabe que a divisão é operação inversa da multiplicação.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \square \text{ então } \square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

Logo, teremos que procurar o número que multiplicado por $\frac{2}{5}$ dará $\frac{3}{4}$ como produto.

NOTA: Antes observemos a seguinte igualdade:

$3 \times 2 = 6$ é uma sentença verdadeira.

Se multiplicarmos por 4 cada membro da igualdade teremos:

$$\underbrace{3 \times 2 \times 4}_{24} = \underbrace{6 \times 4}_{24}$$ que também será uma sentença verdadeira.

Daí concluímos que: em uma igualdade podemos multiplicar ambos os membros por um número qualquer, que ela continuará sendo verdadeira.

Assim: $\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ Sentença verdadeira

$$\underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}_{\frac{6}{24}} = \underbrace{\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}}_{\frac{6}{24}}$$ Sentença verdadeira

Este conceito usaremos agora para calcular o valor de $\square$

Temos: $\square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$

O inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$

Se tomarmos este inverso $\frac{5}{2}$ e mutiplicarmos pelos dois membros da igualdade, esta não se alterará.

Assim teremos:

$$\square \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \iff \square \times \frac{10}{10} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

$$\square \times 1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \iff \square = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

Lembrando a divisão: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \square$ e sabendo quanto vale $\square$, podemos escrever:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

Logo: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = 1\frac{7}{8}$$

dividendo divisor quociente

Note que ao dividirmos dois números racionais absolutos, encontramos um resultado (quociente) que também é um número racional absoluto.

Seja agora a divisão: $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{6}{7} = \square$

Como a divisão é operação inversa da multiplicação podemos escrever:

$$\square \times \frac{6}{7} = \frac{2}{3}$$

Vamos multiplicar agora, ambos os membros da igualdade pelo elemento inverso de $\dfrac{6}{7}$

Inverso de $\dfrac{6}{7} \longrightarrow \dfrac{7}{6}$ Então: $\square \times \underbrace{\dfrac{6}{7} \times \dfrac{7}{6}}_{1} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{6}$

$$\square \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{6} \qquad \square = \frac{2}{3} \times \frac{7}{6}$$

Como $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{6}{7} = \square$

$$\frac{2}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{6}$$

Pelos dois primeiros exemplos, você deve ter percebido que dividir dois números racionais absolutos é o mesmo que multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo.

Então: $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{6}{7} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{6} = \dfrac{14}{18} = \dfrac{7}{9}$ ($\div\, 2$ / $\div\, 2$)

Logo: $\boxed{\dfrac{2}{3} \div \dfrac{6}{7} = \dfrac{7}{9}}$

Podemos chegar às seguintes conclusões:

Para se dividir dois números racionais absolutos, devemos multiplicar o primeiro deles pelo inverso do segundo. Assim:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

O quociente (resultado) da operação de dois números racionais absolutos, sendo o divisor diferente de zero, é também um número racional absoluto.

Podemos então efetuar as seguintes divisões:

$$\longrightarrow \frac{1}{4} \div \frac{2}{7} = \square \qquad \square \times \frac{2}{7} = \frac{1}{4}$$

Inverso de $\frac{2}{7}$ é $\frac{7}{2}$ Então: $\square \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{7}{2}$

$$\square \times 1 = \frac{1}{4} \times \frac{7}{2} \implies \square = \frac{1}{4} \times \frac{7}{2}$$

Logo: $\frac{1}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{8}$

$$\underset{\text{dividendo}}{\frac{1}{4}} \div \underset{\text{divisor}}{\frac{2}{7}} = \underset{\text{quociente.}}{\frac{7}{8}}$$

Lembre-se que a divisão de dois números racionais absolutos dá como resultado um número racional absoluto.

$$\longrightarrow 5 \div \frac{2}{9} = 5 \times \frac{9}{2}$$

inversos

$5 \div \frac{2}{9} = \frac{45}{2}$

Escrevendo sob forma mista: $\boxed{5 \div \frac{2}{9} = 22\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{r|l} 4'5' & 2 \\ \hline 0\,5 & 22 \\ 1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \frac{5}{3} \div 2$$

Sabemos que $2 = \frac{2}{1}$ Inverso de $\frac{2}{1}$ é $\frac{1}{2}$

Então: inverso de 2 é $\frac{1}{2}$ Logo: $\frac{5}{3} \div 2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$

inversos

$$\boxed{\frac{5}{3} \div 2 = \frac{5}{6}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \div \frac{2}{5}$$

Devemos efetuar a divisão entre os dois primeiros números

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{3}{2}$$

Agora dividimos o quociente obtido pelo outro número que é $\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}$$

Então: $\boxed{\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = 3\,\frac{3}{4}}$

$$\rightarrow \quad 3\,\frac{2}{7} \div 4$$

Agora temos um número sob a forma mista. Antes de efetuar a divisão, devemos escrevê-lo sob a forma de fração imprópria.

$3\,\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$ Então teremos:

$$3\,\frac{2}{7} \div 4$$

$$\frac{23}{7} \div 4 = \frac{23}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{23}{28}$$

Logo: $\boxed{3\,\frac{2}{7} \div 4 = \frac{23}{28}}$

Recordando as quatro operações...

OPERAÇÃO	ESCRITA	TERMOS	RESULTADO
Adição	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ → parcelas	soma
Subtração	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$ → minuendo $\frac{c}{d}$ → subtraendo	resto
Multiplicação	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ → fatores	produto
Divisão	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$ → dividendo $\frac{c}{d}$ → divisor	quociente

Sentenças matemáticas

Vejamos alguns exemplos:

1) Nossa receita de pudim pede $2\frac{1}{2}$ xícaras de leite. Marta vai fazer a metade da receita. Quanto gastará de leite?

Se Marta vai fazer a metade da receita, ela gastará a metade da quantidade de leite.

Sabemos que para calcular a metade devemos dividir por 2.

Teremos a sentença:

$$2\frac{1}{2} \div 2 = \square$$

Assim $\square$ é a metade de $2\frac{1}{2}$ e é a quantidade procurada.

$$2\frac{1}{2} \div 2 = \square$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \square$$

$$\frac{5}{4} = \square \quad \text{Logo} \quad \square = 1\frac{1}{4}$$

Marta vai precisar de $1\frac{1}{4}$ xícaras de leite.

---

2) Uma receita de bolo pede $3\frac{1}{4}$ xícaras de farinha. Faremos $2\frac{1}{2}$ receitas. Quantas xícaras de farinha gastaremos?

Observe que um bolo gasta $3\frac{1}{4}$ xícaras de farinha.

Se queremos fazer $2\frac{1}{2}$ bolos, vamos gastar 2 vezes e meia a quantidade de farinha.

Logo a sentença que nos dará a resposta será: $3\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2} = \square$

$$\frac{13}{4} \times \frac{5}{2} = \square$$

Como: $\frac{13}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$ Então: $\square = 8\frac{1}{8}$

Gastaremos no bolo $8\frac{1}{8}$ xícaras de farinha.

3) Um homem transporta 56 sacas de feijão de um armazém para outro em 2 dias.

No primeiro dia ele transporta $\frac{3}{7}$ destas sacas.

Quantas deverá transportar no segundo dia?

Observe que o total de sacas que ele deve levar é 56.

No primeiro dia: $\frac{3}{7}$ de 56. Sabemos que $\frac{3}{7}$ de 56 é $\frac{3}{7} \times 56$.

A quantidade que ele leva no primeiro dia, adicionada à que ele leva no segundo dia, deve totalizar 56.

Assim: 1.º dia + 2.º dia = 56.

$$\frac{3}{7} \times 56 + \square = 56$$

Efetuando a multiplicação. $\frac{168}{7} + \square = 56$

Mas $\frac{168}{7} = 24$, então podemos escrever: $24 + \square = 56$

Aplicando operação inversa: $\square = 56 - 24$

$\square = 32$

Logo, ele deverá levar no 2.º dia, 32 sacas de feijão.

---

4) Sei que $\frac{3}{5}$ dos moradores da minha rua correspondem a 15 pessoas.

Quantos moradores há em minha rua?

Estamos querendo saber quantos moradores há ao todo. Por isso vamos chamar esta quantidade de $\square$

E daí a sentença: $\frac{3}{5}$ de $\square = 15$

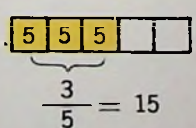
Então podemos escrever: $\frac{3}{5} \times \square = 15$

Como achar o valor de $\square$?
Basta aplicar operação inversa da multiplicação, que é a divisão.

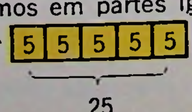
Logo: $\square = 15 \div \frac{3}{5}$

$\square = 15 \times \frac{5}{3} \Longleftrightarrow \square = \frac{75}{3}$ Mas $\frac{75}{3} = 25$ Logo: $\square = 25$

Há 25 moradores em minha rua.
Você poderá verificar facilmente a resposta através da figura.



Como repartimos em partes iguais, então cada quadradinho corresponde a 5 moradores.



O total será de 25.

NOVA REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

Sabemos que as **frações decimais** têm como denominadores potências de 10:

$10^1 \longrightarrow 10$

$10^2 \longrightarrow 100$

$10^3 \longrightarrow 1000$, etc...

Então: $\frac{6}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{6}{1000}$ são exemplos de frações decimais.

Os números racionais absolutos, definidos por frações decimais, podem ser representados por meio de uma **notação decimal exata.**

Vejamos como representar: Observemos a fração decimal $\frac{145}{100}$

Podemos afirmar que:

$$\frac{145}{100} = \underbrace{\frac{100}{100}}_{\substack{1 \\ \text{(inteiro)}}} + \underbrace{\frac{40}{100}}_{\substack{4 \text{ décimos} \\ \left(\frac{40}{100} = \frac{4}{10}\right)}} + \underbrace{\frac{5}{100}}_{5 \text{ centésimos}}$$

Usando a nova notação, separamos a parte inteira do número racional absoluto da parte não inteira, por uma vírgula.

Assim $\frac{145}{100}$ pode ser representado por :

1, 4 5 (lê-se: um inteiro e quarenta e cinco centésimos)

inteiro décimos centésimos

1,45 é a notação decimal da fração $\frac{145}{100}$

Logo: 1,45 e $\frac{145}{100}$ são numerais diferentes do mesmo número, isto é, duas formas diferentes que expressam a mesma idéia.

Note que, na escrita da notação decimal, de um número racional absoluto, obedecemos ao **princípio da posição decimal:**

"Todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior (dez vezes) à deste outro."

Pelo princípio do valor posicional o algarismo 4, escrito à esquerda do algarismo 5 (no exemplo dado), representa unidades dez vezes maiores.

Outros exemplos:

→ Seja a fração decimal $\dfrac{4332}{1000}$

Façamos a decomposição do numerador nas diferentes unidades e teremos:

$$\frac{4332}{1000} = \underbrace{\frac{4000}{1000}}_{\text{4 inteiros}} + \underbrace{\frac{300}{1000}}_{\text{3 décimos}} + \underbrace{\frac{30}{1000}}_{\text{3 centésimos}} + \underbrace{\frac{2}{1000}}_{\text{2 milésimos}}$$

$$\frac{4000}{1000} = 4 \qquad \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} \qquad \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$$

Usando a vírgula para separar a parte inteira da parte não inteira: 4, 3 3 2 (lê-se: quatro inteiros e trezentos e trinta e dois milésimos.)

4,332 é, portanto, a notação decimal da fração decimal: $\dfrac{4332}{1000}$

A parte não inteira — 332, no exemplo dado — é dita parte decimal.

Note que:

$$4,\ \underset{\downarrow}{3}\ \underset{\downarrow}{3}\ 2$$

$$\frac{3}{10} \quad \frac{3}{100}$$

$\dfrac{3}{10}$ é dez vezes maior do que $\dfrac{3}{100}$ $\qquad \dfrac{3}{10} = 10 \times \dfrac{3}{100}$

Pelo princípio do valor posicional o algarismo 3 escrito, imediatamente, à esquerda do outro algarismo 3, representa unidades 10 vezes maiores.

→ Seja a fração decimal $\dfrac{32}{100}$.

$$\frac{32}{100} = \underbrace{\frac{30}{100}}_{\text{3 décimos}} + \underbrace{\frac{2}{100}}_{\text{2 centésimos}}. \qquad \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Note que $\dfrac{32}{100}$ é **menor do que** 1, logo, na notação decimal da fração $\dfrac{32}{100}$ a parte inteira será representada por zero.

$\dfrac{32}{100}$ e 0,32 são numerais diferentes do mesmo número (idéia).

0,32 (lê-se: trinta e dois centésimos).

→ Seja a fração decimal $\frac{35}{1000}$.

$$\frac{35}{1000} = \underbrace{\frac{30}{1000}}_{\text{3 centésimos}} + \underbrace{\frac{5}{1000}}_{\text{5 milésimos}} \qquad \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$$

$\frac{35}{1000}$ é **menor do que** 1, logo a parte inteira da sua notação decimal será representada por zero.

Note que: $$\frac{35}{1000} = \underbrace{\frac{0}{10}}_{\text{0 décimos}} + \underbrace{\frac{3}{100}}_{\text{3 centésimos}} + \underbrace{\frac{5}{1000}}_{\text{5 milésimos}}$$

$$\frac{35}{1000} = \underbrace{0,}_{\text{parte inteira}}\ \underbrace{0}_{\text{décimos}}\ \underbrace{3}_{\text{centésimos}}\ \underbrace{5}_{\text{milésimos}}$$

Atenção: $\frac{0}{10} = 0$

0,035 (lê-se: trinta e cinco milésimos)

Observação: A fim de simplificar a linguagem, nos referiremos a **notação decimal do número racional** apenas como **números decimais.**

Da mesma forma, ao fazermos referência às ordens da parte decimal usaremos o termo: **casas** decimais.

Através de variados exemplos, o professor poderá levar o aluno a concluir que:

> Para se transformar uma fração decimal, em **número decimal,** basta dar ao numerador tantas casas decimais quantos forem os zeros do denominador.

Exemplos:

$\frac{36}{10} = 3,6$ (lê-se: três inteiros e seis décimos)

$\frac{256}{100} = 2,56$ (lê-se: dois inteiros e cinqüenta e seis centésimos)

$\frac{1235}{1000} = 1,235$ (lê-se: um inteiro e duzentos e trinta e cinco milésimos)

$\frac{7}{1000} = 0,007$ (lê-se: sete milésimos)

Na parte **não inteira,** escrita **à direita** da vírgula, que chamamos **parte decimal,** temos:

o primeiro algarismo depois da vírgula representa os **décimos,**

o segundo algarismo, os **centésimos,** e

o terceiro algarismo, os **milésimos.**

Podemos encontrar outras casas decimais na parte decimal. Basta que o denominador seja maior do que 1000.

Então:

3,	6
↓	↓
inteiro	décimos

2,	5	6
↓	↓	↓
inteiro	décimos	centésimos

1,	2	3	5
↓	↓	↓	↓
inteiro	décimos	centésimos	milésimos

0,	0	0	7
↓	↓	↓	↓
inteiro	décimos	centésimos	milésimos

De um modo geral: $\underset{\text{parte inteira}}{\underline{\quad}}\ ,\ \underbrace{\underset{\text{décimos}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{centésimos}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{milésimos}}{\underline{\quad}}}_{\text{parte decimal}}$

Podemos representar um número racional absoluto, escrito sob a forma de notação decimal exata, como uma fração decimal:

1,	4
↓	↓
inteiro	décimos

$1,4 = 1\frac{4}{10}$ (lê-se: um inteiro e quatro décimos) ou $\frac{14}{10}$

0,	5	6
↓	↓	↓
inteiro	décimos	centésimos

$0,56 = \frac{56}{100}$

(lê-se: cinqüenta e seis centésimos)

2,	0	8
↓	↓	↓
inteiro	décimos	centésimos

$2,08 = 2\frac{8}{100}$ ou $\frac{208}{100}$

(lê-se: dois inteiros e 8 centésimos)

Podemos representar um número racional absoluto, escrito sob a forma de notação decimal exata, como uma fração decimal, onde o numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é a unidade, seguida de tantos zeros quantas forem as ordens decimais do número dado.

Exemplos: $2{,}04 = \frac{204}{100}$ $0{,}367 = \frac{367}{1000}$ $1{,}2 = \frac{12}{10}$

Os números decimais (notação decimal de um número racional absoluto) gozam de uma propriedade que diz:

> O valor de um número decimal não se altera quando, na sua parte decimal, acrescentamos ou suprimimos zeros a sua direita.

Então: $1{,}3 = 1{,}30 = 1{,}300$

Comprovamos, facilmente, esta propriedade.

Sabemos que: $1{,}3 = \frac{13}{10}$ $1{,}30 = \frac{130}{100}$ $1{,}300 = \frac{1300}{1000}$

Mas: $\frac{13}{10}$, $\frac{130}{100}$, $\frac{1300}{1000}$ são frações equivalentes:

$$\frac{13}{10} \xrightarrow{\times 10} \frac{130}{100} \xrightarrow{\times 10} \frac{1300}{1000}$$

Logo: $\frac{13}{10} = \frac{130}{100} = \frac{1300}{1000}$

Então 1,3, 1,30 e 1,300 representam a mesma quantidade, pois as frações decimais que os representam são equivalentes.

$$1{,}3 = 1{,}30 = 1{,}300.$$

Um **número natural**, que também é racional absoluto, pode ser escrito com a **notação decimal** dos números racionais absolutos.

Exemplos:

Sabemos que: $5 = \frac{5}{1}$

$$5{,}0 = \frac{50}{10}$$

$$5{,}00 = \frac{500}{100}$$

$$5{,}000 = \frac{5000}{1000}$$

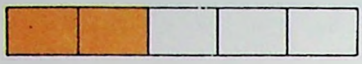
Logo: O número natural 5 pode ser escrito sob a forma das seguintes notações decimais.

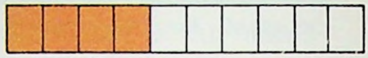
$$5 = 5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000.$$

Poderia surgir a seguinte pergunta:

Uma fração ordinária pode ser escrita sob a forma de notação decimal exata?

Por exemplo: $\frac{2}{5}$ é equivalente a $\frac{4}{10}$





$$\frac{2}{5} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{10}$$

Mas: $\frac{4}{10}$ é uma fração decimal e escrita sob a forma de notação decimal fica 0,4.

Então: $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$ e 0,4 são numerais diferentes do mesmo número.

Outros exemplos:

→ Vamos escrever $\frac{6}{20}$ sob a forma de notação decimal:

Primeiro, procuremos a fração decimal equivalente a $\frac{6}{20}$

$$\frac{6}{20} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{3}{10}$$

$\frac{6}{20}$ é equivalente à fração decimal $\frac{3}{10}$

Como: $\frac{3}{10} = 0{,}3$

Temos que: $\frac{6}{20}$, $\frac{3}{10}$ e 0,3 são numerais diferentes do mesmo número.

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

→ Vamos escrever $\frac{18}{300}$ sob a forma de notação decimal.

$$\frac{18}{300} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{6}{100}$$

e $\frac{6}{100} = 0{,}06$

Logo: $\frac{18}{300} = \frac{6}{100} = 0{,}06$.

Sempre uma fração ordinária pode ser escrita sob a forma de **notação decimal exata?**

Nem sempre. Às vezes a notação decimal usada para representar um número racional absoluto é uma **notação decimal não exata.**

Seja, por exemplo, o número racional absoluto representado pela fração ordinária $\frac{1}{3}$.

Não é possível encontrar uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ cujo denominador seja 10, 100, 1000, ... isto é, não existe uma fração decimal equivalente a $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ não pode ser escrito sob a forma de notação decimal exata.

$\frac{1}{3}$ poderá ser escrito sob a forma de uma notação decimal **não exata,** que não será objeto de nosso estudo.

Lembrando:

- Todo número racional absoluto pode ser representado por meio de uma **notação decimal.**
- Uma **fração decimal** ou uma fração ordinária equivalente a uma fração decimal pode ser escrita por meio de uma **notação decimal exata.**
- Uma **fração ordinária** para a qual **não** existe uma fração **decimal equivalente** pode ser escrita por meio de uma **notação decimal não exata.**
- A **notação decimal exata** tem uma **parte inteira** e uma **parte decimal.** A parte decimal é constituída por **décimos, centésimos, milésimos,** etc.
- Na escrita da **notação decimal exata** de um número racional absoluto obedecemos ao **Princípio da Posição Decimal.**
- Um número decimal não se altera quando se acrescenta um ou mais zeros à direita de sua parte decimal.

  $$8{,}4 = 8{,}40 = 8{,}400$$

- Todo número natural pode ser escrito por meio de uma notação decimal exata.

  $7 = 7{,}0 = 7{,}00 = 7{,}000$

- Na leitura de um número decimal, lê-se a parte inteira, seguida da palavra inteiro ou inteiros, e em seguida lê-se a parte decimal, acrescentando o nome da última casa decimal.

$\underset{\text{milésimos}}{2{,}03\underset{\downarrow}{9}}$ lê-se: dois **inteiros** e trinta e nove **milésimos.**

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS, ESCRITOS SOB A FORMA DE NOTAÇÃO DECIMAL.

Igualdade de números decimais

Sabemos que **números decimais** são **iguais** se as frações decimais correspondentes são equivalentes.

Assim podemos afirmar que:

$4{,}00 = 4{,}0$ pois $\frac{400}{100}$ e $\frac{40}{10}$ são frações equivalentes.

$3 = 3{,}0$ pois $\frac{3}{1}$ e $\frac{30}{10}$ são frações equivalentes.

$12{,}0 = 12{,}00$ pois $\frac{120}{10}$ e $\frac{1200}{100}$ são frações equivalentes

Desigualdade de números decimais

Vamos comparar os números decimais: 2,4 e 2,6.

$2{,}4 \neq 2{,}6$ pois $\frac{24}{10}$ e $\frac{26}{10}$ não são frações equivalentes.

$2{,}4 \neq 2{,}6$ lê-se: dois inteiros e quatro décimos é **diferente de** dois inteiros e seis décimos.

Sabemos que: $\frac{26}{10} > \frac{24}{10}$

Logo:

$2{,}6 > 2{,}4$ (dois inteiros e seis décimos é maior que dois inteiros e quatro décimos).

Comparemos os números decimais:

0,35 e 0,342

$0{,}35 \neq 0{,}342$ pois $\frac{35}{100}$ e $\frac{342}{1000}$ não são frações equivalentes.

Comparemos, então, as frações decimais equivalentes aos números decimais dados:

reduzindo ao menor denominador comum: $\frac{35}{100}$ e $\frac{342}{1.000}$

$$\frac{350}{1.000} \text{ e } \frac{342}{1.000}$$

$$\frac{342}{1.000} < \frac{350}{1.000}$$

Logo: $0{,}342 < 0{,}35$ (trezentos e quarenta e dois milésimos **é menor que** trinta e cinco centésimos).

A comparação de números decimais (notação decimal de um número racional absoluto) é feita comparando-se, a partir da esquerda, os algarismos que representam unidades de mesma ordem.

Assim:

1) inteiro com inteiro

2) décimos com décimos

3) centésimos com centésimos

4) milésimos com milésimos.

Exemplos:

1) 8,32 e 5,9

Comparemos a partir da esquerda:

8 e 5
$8 > 5$

Logo: $8{,}32 > 5{,}9$

---

2) 4,63 e 4,7

$4 = 4$. Comparamos inteiro com inteiro e verificamos que são iguais. Continuaremos, então, comparando, agora, décimo com décimo: $6 < 7$

Logo: $4{,}63 < 4{,}7$

---

3) 1,285 e 1,281

$1 = 1$
$2 = 2$
$8 = 8$
$5 > 1$
$1{,}285 > 1{,}281$

---

4) 4,529 e 4,52

$4 = 4$
$5 = 5$
$2 = 2$
$9 > 0$

ATENÇÃO: O algarismo **zero** não escrito está na casa de milésimo do segundo número.

Operações com números racionais absolutos escritos sob a forma de notação decimal exata.

Como já definimos as operações adição, subtração, multiplicação e divisão para números racionais absolutos, não será necessário defini-las novamente, pois ainda estamos trabalhando com os números racionais absolutos, porém representados sob uma outra forma.

Basta, portanto, examinar **como** tais operações, na prática, se realizam.

Adição

→ Seja:

$$2{,}43 + 0{,}62 + 1{,}05 = \square$$

Sabemos que: $2{,}43 = \dfrac{243}{100}$ $\quad 0{,}62 = \dfrac{62}{100}$ $\quad 1{,}05 = \dfrac{105}{100}$

Temos, então: $\dfrac{243}{100} + \dfrac{62}{100} + \dfrac{105}{100} = \square$

Como $\dfrac{243}{100}$, $\dfrac{62}{100}$, $\dfrac{105}{100}$ são frações homogêneas, vem que:

$$\frac{243}{100} + \frac{62}{100} + \frac{105}{100} = \frac{410}{100} = 4{,}10$$

Logo: $2{,}43 + 0{,}62 + 1{,}05 = 4{,}10$

→ Qual será o resultado de $2{,}03 + 5 + 1{,}2$?

Escrevendo-as sob a forma de frações temos:

$$\overset{1}{\frac{203}{100}} + \overset{100}{\frac{5}{1}} + \overset{10}{\frac{12}{10}}$$

Ou, reduzindo ao menor denominador comum:

$$\frac{203}{100} + \frac{500}{100} + \frac{120}{100} = \frac{823}{100} = 8{,}23$$

Logo: $\underbrace{2{,}03 + 5 + 1{,}2}_{\text{parcelas}} = \underbrace{8{,}23}_{\text{soma}}$

Evidentemente, não faremos a transformação em frações cada vez que adicionarmos as notações decimais de um número racional absoluto.

Através de variados exemplos, o professor deverá levar o aluno à técnica, chamando atenção sobre os seguintes fatos:

1 • se só podemos adicionar frações homogêneas

• se frações homogêneas, escritas sob a forma de notação decimal, têm sempre o mesmo número de casas decimais.

Então: devemos **igualar** as casas decimais dos números decimais que queremos adicionar.

2 Como só podemos adicionar unidades da mesma ordem, as vírgulas ficarão uma embaixo da outra.

3 Tomados os cuidados acima mencionados, seguiremos os mesmos processos da operação adição com números naturais.

Exemplos:

→ $2{,}3 + 15{,}53 + 0{,}242 = \square$

• Igualando as casas decimais:

$2{,}300 + 15{,}530 + 0{,}242$

ATENÇÃO: Os números racionais absolutos continuam iguais quando acrescentamos **zeros** à direita da parte decimal de sua notação.

• Ou, colocando os números de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam, ficando as vírgulas uma embaixo da outra:

$$\begin{array}{r} 2{,}300 \\ 15{,}530 \\ +\ \ 0{,}242 \\ \hline \end{array}$$

• Adicionando como números naturais:

$$\begin{array}{r} 2{,}300 \\ 15{,}530 \\ +\ \ 0{,}242 \\ \hline 18{,}072 \end{array}$$

NOTA: Podemos observar, no resultado, que as unidades de mesma ordem correspondem às unidades das parcelas; ficando a vírgula do resultado, embaixo das vírgulas das parcelas.

Outra maneira de adicionar números decimais, usando o quadro de "valor de lugar".

UNIDADES	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I I I I I I I I I I I I I I I I	I I I I I I I I I I	I I I I I I I	I I

Como dez décimos $\left(\frac{10}{10}\right)$ formam uma unidade, temos:

UNIDADES	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I I I I I I I I I I I I I I I I I	I I I I I I I I I I	I I I I I I I	I I

ou

UNIDADES	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I I I I I I I I I I I I I I I I I		I I I I I I I	I I
18	0	7	2

Donde, 2,3 + 15,53 + 0,242 = 18,072 (lê-se: dezoito inteiros e setenta e dois milésimos).

→ 4,7 + 6 + 0,34 = □

4,7 = 4, 7 0   6 = 6, 0 0   0,34 = 0, 3 4

$$\left.\begin{array}{r} 4{,}70 \\ 6{,}00 \\ +\ 0{,}34 \end{array}\right\} \text{parcelas}$$

$$\begin{array}{r} 11{,}04 \end{array} \rightarrow \text{soma}$$

Logo: 4,7 + 6 + 0,34 = 11,04 (lê-se: onze inteiros e quatro centésimos).

→ 0,3 + 4,56 = □

$$\begin{array}{r} 0{,}30 \\ +\ 4{,}56 \\ \hline 4{,}86 \end{array}$$

Subtração

→ **Seja:** 2,8 − 1,3 = □

Sabemos que: $2{,}8 = \frac{28}{10}$ $\quad 1{,}3 = \frac{13}{10}$

Temos, então: $\frac{28}{10} - \frac{13}{10} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

Logo: $\underbrace{2{,}8}_{\text{minuendo}} - \underbrace{1{,}3}_{\text{subtraendo}} = \underbrace{1{,}5}_{\text{resto}}$ (lê-se: um inteiro e cinco décimos)

→ 2,24 — 1,1 = □

Usando o quadro de "valor de lugar".

UNIDADES	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I	I I	I I I I	

Retiremos:

1 unidade e um décimo

Então:

UNIDADES	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I	I	I I I I	
1	1	4	0

Logo: 2,24 — 1,1 = 1,140 ou 1,14

Percebemos que, assim como na adição, para efetuarmos a subtração usamos uma **técnica**.

Esta técnica baseia-se nos mesmos fatos vistos para a adição de números decimais.

Ou seja:

1) Igualam-se as casas decimais acrescentando-se **zeros** à direita da parte decimal.
2) Colocam-se as unidades de mesma ordem uma embaixo da outra, ficando as vírgulas na mesma disposição.
3) Utilizam-se os mesmos processos da operação subtração com números naturais.

Exemplos:

→ 2, 6 — 1,43 = □

- Igualando-se as casas decimais:

2,60 — 1,43

- Ou, colocando os numerais de modo que as unidades de mesma ordem se correspondam:

$$\begin{array}{r} 2{,}60 \\ -\ 1{,}43 \\ \hline \end{array}$$

- Subtraindo como números naturais: $\begin{array}{r} 2{,}60 \\ -\ 1{,}43 \\ \hline 1{,}17 \end{array}$

Logo: $\underbrace{2{,}6}_{\text{minuendo}} - \underbrace{1{,}43}_{\text{subtraendo}} = \underbrace{1{,}17}_{\text{resto}}$ (lê-se um inteiro e dezessete centésimos)

→ $6 - 1{,}45 = ?$

$6 = 6{,}\ 0\ 0$

$1{,}45 = 1,\ 4\ 5$

6,00	minuendo
— 1,45	subtraendo
4,55	resto

Logo: $6 - 1{,}45 = 4{,}55$ (lê-se: quatro inteiros e cinqüenta e cinco centésimos).

→ $2{,}4 - 1{,}06 = \square$

$2{,}4 = 2,\ 4\ 0$

$1{,}06 = 1,\ 0\ 6$

$$\begin{array}{r} 2{,}40 \\ -\ 1{,}06 \\ \hline 1{,}34 \end{array}$$

Logo: $2{,}4 - 1{,}06 = 1{,}34$ (lê-se: um inteiro e trinta e quatro centésimos).

Multiplicação:

→ **Seja:** $0{,}3 \times 7 = \square$

Sabemos que: $0{,}3 = \dfrac{3}{10}$

Temos então: $\dfrac{3}{10} \times 7$

Esta operação já sabemos efetuar: $\dfrac{3}{10} \times 7 = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$

Então: $\underbrace{0{,}3 \times 7}_{\text{fatores}} = \underbrace{2{,}1}_{\text{produto}}$

ou usando o quadro "valor de lugar", teremos:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS

Como dez décimos formam uma unidade, teremos:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I			

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I	I		
2	1	0	0

Donde: $0{,}3 \times 7 = 2{,}1$ (lê-se: dois inteiros e um décimo).

→ Efetuemos: $1{,}24 \times 3 = \square$ Temos que: $1{,}24 = \dfrac{124}{100}$

Então: $\dfrac{124}{100} \times 3 = \dfrac{372}{100} = 3{,}72$

Logo: $\underbrace{1{,}24 \times 3}_{\text{fatores}} = \underbrace{3{,}72}_{\text{produto}}$

Usando o quadro "valor de lugar", teremos:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I I	I I I I I I	I I I I I I I I I I I I	

Como dez centésimos ($\dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$) formam um décimo, teremos:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I I	I I I I I I I	I I I I I I I I I I I I	
3	7	2	0

Logo: $1{,}24 \times 3 = 3{,}72$

→ $1{,}4 \times 0{,}53 = \square$

Temos que: $1{,}4 = \dfrac{14}{10}$ e $0{,}53 = \dfrac{53}{100}$

Efetuando a multiplicação destas frações decimais, teremos:

$$\frac{14}{10} \times \frac{53}{100} = \frac{742}{1.000} = 0,742$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 53 \\ \hline 42 \\ 70 \\ \hline 742 \end{array}$$

Logo: $1{,}4 \times 0{,}53 = 0{,}7\ \ 2$ (lê-se: setecentos e quarenta e dois milésimos).

O que percebemos nestas multiplicações?

O número de casas decimais do produto (resultado) é igual à soma dos números de casas decimais dos fatores.

Assim: 1,4 × 0,53 = 0,742

1,4 → uma casa decimal

0,53 → duas casas decimais

0,742 → três casas decimais

O resultado foi obtido multiplicando-se os fatores como se fossem números naturais e colocando-se a vírgula de acordo com a observação anterior.

Assim: 1,4 × 0,53 = 0,742

↓ ↓ ↓

14 × 53 = 742

Considerando agora o número de casas decimais dos fatores, o resultado será 0,742.

Exemplos:

→ 0,35 × 6 = □

Multiplicando-se os fatores como se fossem números naturais:

35 × 6 = 210

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times \quad 6 \\ \hline 210 \end{array}$$

Considerando o número de casas decimais dos fatores:

0,35 × 6 = 2,10

0,35 → duas casas decimais

6 → não tem casas decimais

2,10 → duas casas decimais

Logo: 0,35 × 6 = 2,10

→ 3,4 × 0,06 = □

Multiplicando-se os fatores como se fossem números naturais:

34 × 6 = 204

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times \quad 6 \\ \hline 204 \end{array}$$

Considerando o número de casas decimais dos fatores:

3,4 × 0,06 = 0,204

3,4 → uma casa decimal

0,06 → duas casas decimais

0,204 → três casas decimais

ATENÇÃO: Como o número de casas decimais do resultado deverá ser 3 (soma das casas decimais dos fatores), colocaremos **zero** indicando ausência de parte inteira.

→ $2{,}12 \times 0{,}5 = \square$

$$\begin{array}{r} 2{,}12 \\ \times \quad 0{,}5 \\ \hline 1{,}060 \end{array}$$

Logo: $2{,}12 \times 0{,}5 = 1{,}060$ ou $1{,}06$

→ $3{,}46 \times 10 = \square$

$346 \times 10 = 3.460$

duas casas decimais	não tem casas decimais →	o resultado terá 2 casas decimais.

Logo: $3{,}46 \times 10 = 34{,}60$ ou $34{,}6$

→ $0{,}574 \times 100 = \square$

$574 \times 100 = 57.400$

três casas decimais	não tem casas decimais →	o resultado terá 3 casas decimais.

Logo: $0{,}574 \times 100 = 57{,}400$ ou $57{,}4$

→ $2{,}4 \times 100 = \square$

$24 \times 100 = 2.400$

uma casa decimal	não tem casas decimais →	o resultado terá 1 casa decimal.

Logo: $2{,}4 \times 100 = 240{,}0$ ou 240

Nos três últimos exemplos apresentados, multiplicamos números decimais por potências de 10: 10 e 100.

Através de variados exemplos de multiplicação de números decimais por 10, 100, 1.000 etc., o professor poderá levar o aluno a observar que:

A multiplicação de um número decimal por potências de 10 implica apenas um deslocamento de vírgula para a direita uma, duas ou mais ordens decimais de acordo com a potência de 10 pela qual ele está sendo multiplicado.

Assim, na multiplicação por 10 — desloca-se a vírgula uma ordem, por 100, duas ordens etc., para a direita.

Exemplos:

$\rightarrow$ 2,63 $\times$ 10 $=$ $\square$

número decimal

potência de 10

$10 = 10^1$ $\rightarrow$ deslocaremos a vírgula uma ordem para a direita.

Logo: $2{,}63 \times 10 = 26{,}3$

Notamos que, ao multiplicarmos 2,63 por 10, estamos tornando 2,63 dez vezes maior.

Então temos:

2 inteiros $\times$ 10 $=$ 20 inteiros

6 décimos $\times$ 10 $=$ 60 décimos $=$ 6 inteiros

3 centésimos $\times$ 10 $=$ 30 centésimos $=$ 3 décimos

Observamos então que o algarismo que ocupa uma determinada ordem passou a ocupar uma ordem imediatamente superior.

$\rightarrow$ 0,54 $\times$ 100 $=$ $\square$

número decimal

potência de 10

$100 = 10^2$ $\rightarrow$ deslocaremos a vírgula 2 ordens para a direita.

Então: $0{,}54 \times 100 = 54$

Divisão

$\rightarrow$ Seja: $0{,}6 \div 2 = \square$ Sabemos que: $0{,}6 = \dfrac{6}{10}$ e $2 = \dfrac{2}{1}$

Esta operação já sabemos efetuar:

$$\frac{6}{10} \div \frac{2}{1} = \frac{6}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{20}$$

Procuremos a fração decimal equivalente a $\dfrac{6}{20}$ (basta simplificar a fração):

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Logo: $\underbrace{0{,}6}_{\text{dividendo}} \div \underbrace{2}_{\text{divisor}} = \underbrace{0{,}3}_{\text{quociente}}$

ou usando o quadro "valor de lugar", teríamos:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
	I I I I I I		

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
	I I I		
	I I I		

Donde: $0{,}6 \div 2 = 0{,}3$

→ Efetuemos: $2{,}463 \div 3 = \square$

Sabemos que: $2{,}463 = \dfrac{2.463}{1.000}$ e $3 = \dfrac{3}{1}$

Temos então:

$$\frac{2.463}{1.000} \div \frac{3}{1} = \frac{2.463}{1.000} \times \frac{1}{3} = \frac{2.463}{3.000}$$

A fração decimal equivalente a $\dfrac{2.463}{3.000}$ é:

$$\frac{2.463}{3.000} \overset{\div 3}{=} \frac{821}{1.000} = 0{,}821$$

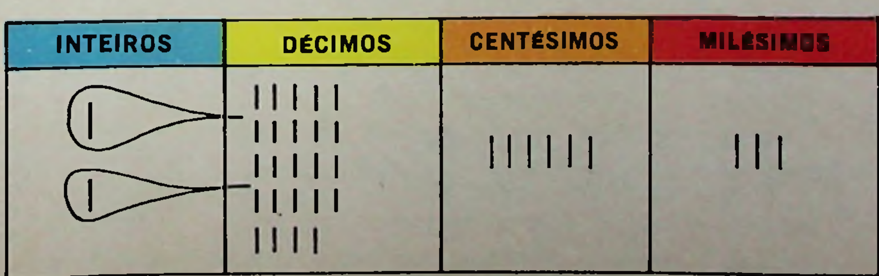
Logo: $\underbrace{2{,}463}_{\text{dividendo}} \div \underbrace{3}_{\text{divisor}} = \underbrace{0{,}821}_{\text{quociente}}$

ou usando o quadro "valor de lugar":

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
I I	I I I I	I I I I I I	I I I

Quando dividirmos os inteiros veremos que não temos inteiros suficientes para dividir por 3.

Como 1 inteiro $\left(1 = \dfrac{10}{10}\right)$ é igual a dez décimos, podemos transformar 2 inteiros em 20 décimos.



Podemos, agora, dividir:

INTEIROS	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
	I I I I I I I I	I I	I
	I I I I I I I I	I I	I
	I I I I I I I I	I I	I
0	8	2	1

Logo: $2{,}463 \div 3 = 0{,}821$

→ Seja: $8 \div 0{,}2 = \square$

Sabemos que:

$$8 = \frac{8}{1} \text{ e } 0{,}2 = \frac{2}{10}$$

Temos: $\frac{8}{1} \div \frac{2}{10} = \frac{8}{1} \times \frac{10}{2} = \frac{80}{2}$

Procuremos a fração decimal equivalente a $\frac{80}{2}$.

$$\frac{80}{2} \underset{\times 5}{\overset{\times 5}{=}} \frac{400}{10} = 40{,}0$$

Logo: $8 \div 0{,}2 = 40{,}0 = 40$

→ Efetuemos: $2{,}4 \div 0{,}8 = \square$

$$2{,}4 = \frac{24}{10}$$

$$0{,}8 = \frac{8}{10}$$

Temos: $\frac{24}{10} \div \frac{8}{10} = \frac{24}{10} \times \frac{10}{8} = \frac{240}{80} = 3$

Logo: $2{,}4 \div 0{,}8 = 3$

→ $11,46 \div 0,2 = \square$

$$11,46 = \frac{1.146}{100} \quad \text{e} \quad 0,2 = \frac{2}{10}$$

Temos então:

$$\frac{1.146}{100} \div \frac{2}{10} = \frac{1.146}{100} \times \frac{10}{2} = \frac{11.460}{200}$$

Procuremos a fração decimal equivalente a $\frac{11.460}{200}$

$$\frac{11.460}{200} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{5.730}{100} = 57,30 = 57,3$$

Logo: $11,46 \div 0,2 = 57,3$.

Observemos as divisões feitas:

1) $0,6 \div 2 = 0,3$
2) $2,463 \div 3 = 0,821$
3) $8 \div 0,2$ ou $8,0 \div 0,2 = 40$
4) $2,4 \div 0,8 = 3$
5) $11,46 \div 0,2 = 57,3$

e lembremos que a multiplicação é a operação inversa da divisão.

Notamos que:

> Se na multiplicação de dois números decimais o produto reúne o número de ordens decimais dos fatores, na divisão o dividendo reúne o número de ordens decimais do divisor e quociente.

Assim:

dividendo		divisor		quociente		fatores				produto
11,46	$\div$	0,2	$=$	57,3	↔	0,2	$\times$	57,3	$=$	11,46
2 casas decimais	$-$	1 casa decimal	$=$	1 casa decimal	↔	1 casa decimal	$+$	1 casa decimal	$=$	2 casas decimais

$$\begin{array}{cccccccccccc} \longrightarrow & 2{,}4 & \div & 0{,}8 & = & 3 & \Longleftrightarrow & 3 & \times & 0{,}8 & = & 2{,}4 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{1 casa decimal} & - & \text{1 casa decimal} & = & \text{0 casa decimal} & \Longleftrightarrow & \text{0 casa decimal} & + & \text{1 casa decimal} & = & \text{1 casa decimal} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \longrightarrow & 2{,}463 & \div & 3 & = & 0{,}821 & \Longleftrightarrow & 3 & \times & 0{,}821 & = & 2{,}463 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{3 casas decimais} & - & \text{0 casa decimal} & = & \text{3 casas decimais} & \Longleftrightarrow & \text{0 casa decimal} & + & \text{3 casas decimais} & = & \text{3 casas decimais} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \longrightarrow & 0{,}6 & \div & 2 & = & 0{,}3 & \Longleftrightarrow & 2 & \times & 0{,}3 & = & 0{,}6 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{1 casa decimal} & - & \text{0 casa decimal} & = & \text{1 casa decimal} & \Longleftrightarrow & \text{0 casa decimal} & + & \text{1 casa decimal} & = & \text{1 casa decimal} \end{array}$$

$\longrightarrow$ $8 \div 0{,}2 = 40 \Longleftrightarrow 0{,}2 \times 40 = 8$

Neste exemplo surge a necessidade de preparar previamente o dividendo (como poderíamos ter: $0 - 1 = ?$).

Sabendo que:

$$\begin{array}{l} 8 = 8{,}0 \\ \qquad\ \ \downarrow \\ \qquad\ \text{1 casa decimal} \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 8{,}0 & \div & 0{,}2 & = & 40 & \Longleftrightarrow & 0{,}2 & \times & 40 & = & 8{,}0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & - & 1 & = & 0 & \Longleftrightarrow & 1 & + & 0 & = & 1 \end{array}$$

Logo, para saber o número de ordens decimais do quociente é necessário apenas achar a diferença entre a quantidade de ordens decimais do dividendo e as do divisor.

$$\begin{array}{c} \text{N.º de} \\ \text{casas decimais} \\ \text{do} \\ \text{dividendo} \end{array} - \begin{array}{c} \text{N.º de} \\ \text{casas decimais} \\ \text{do} \\ \text{divisor} \end{array} = \begin{array}{c} \text{N.º de} \\ \text{casas decimais} \\ \text{do} \\ \text{quociente} \end{array}$$

ATENÇAO: O número de casas decimais do dividendo deve sempre ser **maior ou igual** ao número de casas decimais do divisor.

Então, o resultado de uma divisão de números decimais é obtido dividindo-se, dividendo por divisor, como se fossem números naturais e colocando-se a vírgula de acordo com a observação feita.

Exemplos:

→ $4{,}28 \div 0{,}4 = \square$

Dividindo-se, dividendo por divisor, como se fossem números naturais.

$428 \div 4 = 107$

Considerando o número de casas decimais do dividendo e divisor:

4,28	÷	0,4	=	10,7
↓		↓		↓
2 casas decimais	—	1 casa decimal	=	1 casa decimal

Logo: $4{,}28 \div 0{,}4 = 10{,}7$

→

5,31	÷	3	=	□
531	÷	3	=	177
2 casas decimais		nenhuma casa decimal		2 casas decimais

$$\begin{array}{r|l} 5\,31 & 3 \\ \hline 23 & 177 \\ 21 & \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $5{,}31 \div 3 = 1{,}77$

→ $2{,}3 \div 0{,}05 = \square$

O número de casas decimais do dividendo é **menor** que o número de casas decimais do divisor.

Preparemos o dividendo:

$2{,}3 = 2{,}30$

Temos:

2,30	÷	0,05 =		
230	÷	5	=	46
2 casas decimais	—	2 casas decimais		resultado será um número natural.

$$\begin{array}{r|l} 230 & 5 \\ \hline 30 & 46 \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $2{,}3 \div 0{,}05 = 46$

$\longrightarrow 16 \div 0{,}04 = \square$

$16 = 16{,}00$

$$\begin{array}{r|l} 16{,}00 & 0{,}04 \\ \hline 0\ 00 & 4\ 00 \end{array}$$

Logo: $16 \div 0{,}04 = 400$

N.º de casas decimais

$$\begin{array}{ccccc} \text{dividendo} & \div & \text{divisor} & = & \text{quociente} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & - & 2 & = & 0 \end{array}$$

Divisão de números decimais por potências de 10: 10, 100, 1.000 etc.

Sabemos que:

$4{,}73 \times 10 = 47{,}3$ então podemos afirmar que: $47{,}3 \div 10 = 4{,}73$

$0{,}634 \times 10 = 6{,}34$ então podemos afirmar que: $6{,}34 \div 10 = 0{,}634$

$1{,}58 \times 100 = 158$ então podemos afirmar que: $158 \div 100 = 1{,}58$

Observando os exemplos apresentados e lembrando ser a divisão operação inversa da multiplicação, temos:

> A divisão de um número decimal por potências de 10 é feita com um deslocamento da vírgula para a esquerda uma, duas ou mais ordens decimais de acordo com a potência de 10 pelo qual ele está sendo dividido.

Exemplos:

$\longrightarrow 12{,}63 \div 10 = ?$

$12{,}63 \downarrow$ número decimal

$10 \downarrow$ potência de 10

$10 = 10^1 \longrightarrow$ deslocaremos a vírgula 1 ordem para a esquerda.

Logo: $12{,}63 \div 10 = 1{,}263$

Notamos que ao dividirmos 12,63 por 10, estamos tornando 12,63 dez vezes menor.

Então:

10 inteiros $\div$ 10 = 1 inteiro

2 inteiros $\div$ 10 = décima parte de 2 inteiros = 2 décimos

6 décimos $\div$ 10 = décima parte de 6 décimos = 6 centésimos

3 centésimos $\div$ 10 = décima parte de 3 centésimos = 3 milésimos

Observamos que o algarismo que ocupa uma determinada ordem passou a ocupar uma ordem imediatamente inferior.

$$14{,}25 \div 100 = ?$$

número decimal — potência de 10

$1\,0\,0 = 10^2$ — deslocaremos a vírgula 2 ordens para a esquerda.

Logo: $14{,}25 \div 100 = 0{,}1425$

ATENÇÃO: deslocando-se a vírgula 2 ordens para a esquerda precisaremos colocar zero indicando a ausência de unidades na parte inteira.

$\longrightarrow 126{,}3 \div 100 = 1{,}263$

$\longrightarrow 86 \div 10 = 8{,}6$

Divisões não exatas (quocientes aproximados)

Ampliando o estudo das divisões, quer de números naturais, quer de números decimais, pode-se determinar o quociente de uma divisão não exata com uma aproximação desejada. Desta forma, podemos interpretar problema da vida prática, tais como:

Você quer repartir 53 laranjas por 6 colegas. Quantas laranjas receberá cada um?

$53 \div 6$ é uma divisão não exata pois não é possível encontrar um número natural que multiplicado por 6, dê 53 pois:

$8 \times 6 = 48$ é menor que 53

$9 \times 6 = 54$ é maior que 53

Se você der 8 laranjas a cada colega, sobrarão 5 laranjas.

$(8 \times 6) + 5 = 53$

Se você quiser dar 9 laranjas a cada colega, faltará 1 laranja.

Nestas condições, só cabe resolver o problema por aproximação, uma vez que o quociente procurado não é nem o número natural 8 nem o número natural 9.

Seja, por exemplo, a divisão de 5 por 2:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$5 \div 2$ é uma divisão não exata. O quociente aproximado encontrado é 2.

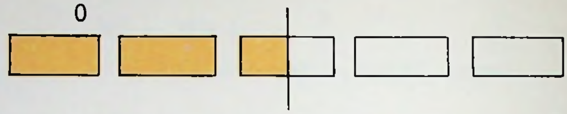
Se tivermos necessidade de um resultado mais aproximado podemos preparar o dividendo:

Sabemos que: $5 = 5{,}0$

Agora temos: $5{,}0 \div 2 = \square$ Esta divisão nós já sabemos fazer:

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 2 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 2{,}5 \\ 0 & \end{array}$$

Assim: $5 \div 2 = 2{,}5$



Note que: $2{,}5 = 2\frac{5}{10}$ ou ainda: $2{,}5 = 2\frac{1}{2}$

Mas $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Temos então que $5 \div 2 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$ Isto é $\boxed{5 \div 2 = \frac{5}{2}}$

→ Vamos dividir 10 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array}$$

divisão não exata

quociente aproximado

Aproximaremos mais o resultado lembrando que: $10 = 10{,}0$

$$\begin{array}{r|l} 10{,}0 & 4 \\ \cline{2-2} 2\,0 & 2{,}5 \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $10 \div 4 = 2{,}5$

Outros exemplos:

→ $5 \div 4 = \square$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

$5 = 5{,}0$

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 4 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 1{,}2 \\ 2 & \end{array}$$

ou ainda

$5 = 5{,}0 = 5{,}00$

$$\begin{array}{r|l} 5{,}00 & 4 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 1{,}25 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $5 \div 4 = 1{,}25$

Temos que: $1{,}25 = \dfrac{125}{100}$

Então podemos formar a igualdade:

$$5 \div 4 = 1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

Simplificando:

$$\frac{125}{100} \xrightarrow{\div 25} \frac{5}{4}$$

Logo: $5 \div 4 = \dfrac{5}{4}$

→ $9 \div 6 = \square$

$$\begin{array}{l|l} 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$9 = 9{,}0$

$$\begin{array}{l|l} 9{,}0 & 6 \\ \hline 3\,0 & 1{,}5 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

Logo: $9 \div 6 = 1{,}5$

Temos também que: $9 \div 6 = \dfrac{9}{6}$

Desta forma chegamos à técnica necessária para determinar quocientes aproximados:

1) Escrevemos o número natural com a notação decimal do número racional absoluto acrescentando tantos zeros quantas casas decimais precisamos no quociente.

2) Efetuamos a divisão obtida.

Se obtivermos um quociente com duas casas decimais, teremos um resultado satisfatório.

Logo, sempre que a divisão não for exata, basta que acrescentemos dois zeros no dividendo (assim obteremos duas casas no quociente).

Exemplos:

→ $39 \div 4 = ?$

Acrescentando duas casas ao dividendo:

$39 = 39{,}00$

Teremos:

$$\begin{array}{r|l} 39{,}00 & 4 \\ \hline 3\,0 & 9{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Então: $39 \div 4 = 9{,}75$

→ $16 \div 5$

Acrescentando-se duas casas ao dividendo:

$16 = 16{,}00$

Logo:

$$\begin{array}{r|l} 16{,}00 & 5 \\ \hline 1\,0 & 3{,}20 \\ 00 & \end{array}$$

Como $3{,}20 = 3{,}2$

Então: $16 \div 5 = 3{,}2$.

Note que neste caso não havia necessidade de acrescentarmos dois zeros no dividendo. Bastava um para que a divisão fosse exata.

Como é difícil sabermos quantos zeros precisaremos, podemos colocar sempre dois.

→ Qual o resultado de $\frac{7}{4}$?

Já vimos que $\frac{7}{4} = 7 \div 4$

Efetuando esta divisão:

$7 = 7{,}00$

$$\begin{array}{r|l} 7{,}00 & 4 \\ \hline 3\,0 & 1{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1{,}75$

Logo: $\boxed{\frac{7}{4} = 1{,}75}$

Notamos então que uma fração é igual ao quociente da divisão do numerador pelo denominador.

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

No estudo de divisões de um número decimal por outro, trabalhamos, muitas vezes, com divisões não exatas.

Caso seja necessário, poderemos sempre encontrar quocientes mais aproximados, seguindo o mesmo raciocínio das divisões aproximadas de números naturais.

Exemplos:

→ $3{,}78 \div 0{,}4 = \square$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}78 & 0\ 4 \\ \cline{2-2} 18 & 9{,}4 \\ 2 & \end{array}$$

Procurando um quociente mais aproximado e lembrando que:

$$3{,}78 = 3{,}780$$

então:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}780 & 0{,}4 \\ \cline{2-2} 18 & 9{,}45 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Logo: $3{,}78 \div 0{,}4 = 9{,}45$

→ $2{,}5 \div 6 = \square$

$$\begin{array}{r|l} 2{,}5 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 0{,}4 \end{array}$$

Como: $2{,}5 = 2{,}50$

$$\begin{array}{r|l} 2{,}50 & 6 \\ \cline{2-2} 10 & 0{,}41 \\ 4 & \end{array}$$

Logo: $2{,}5 \div 6 = 0{,}41$ resto $0{,}04$

Porcentagem

Este assunto é do interesse do aluno e faz parte de sua vida prática. Poderá ser lançado através de recortes de jornal em que apareçam descontos de preços de mercadorias, desconto para o INPS etc.

À medida que for mostrando os anúncios, o professor irá lendo e comentando com os alunos o conteúdo dos mesmos.

Exemplo:

— Vejamos o que diz este anúncio:

Artigo da semana — camisas para homem
Preços com 20% de desconto

— Vocês sabem o que quer dizer **20 por cento de desconto?**

O professor poderá escrever no quadro negro: 20%

Sabemos que ao comprar uma camisa pagaremos mais barato, ou seja, menos 20 por cento de seu preço.

Mas, quanto é 20 por cento do preço?

Por cento é uma nova maneira de dizer **centésimos.** O desconto da camisa, portanto, será de **20 centésimos** ou **20 por cento** do preço.

Logo: $\frac{20}{100}$ e 20% são numerais diferentes do mesmo número.

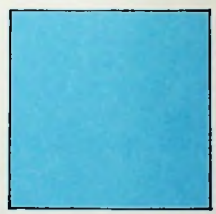
Trabalharemos em porcentagem, portanto, partindo do conceito já aprendido de **fração decimal.**

Poderemos mostrar um quadro de cartolina que tem uma das faces dividida em 100 partes iguais.

Mostrando, primeiro, a face não dividida, o professor perguntará:

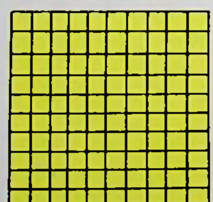
— Que é que vocês estão vendo?

Um quadro de cartolina inteiro, ou seja uma unidade. É importante que o aluno perceba inicialmente que temos 1 unidade.



Mostrando, depois, a face dividida em 100 partes iguais, lançará as perguntas:

— Como estão vendo vocês, agora, o inteiro?



O inteiro está agora dividido em 100 partes iguais ou 100 quadradinhos.

— Que parte do quadro maior é cada quadradinho?

Um centésimo ou, da outra forma que aprendemos, um por cento.

— Se tomarmos 5 quadradinhos, que parte teremos do quadro maior?

5 centésimos ou 5 por cento, pois tomamos 5 de 100.

Usando uma ficha de cartolina de outra cor, poderemos cobrir o quadro dividido em 100 partes iguais de tal forma que apareçam apenas: 10, 20, 25, 50, 75, 80, 100 quadradinhos, e perguntar:

— Que parte do quadro vocês podem ver?

— Que parte está escondida?

Procuraremos sempre levar o aluno às duas respostas: centésimos e por cento.

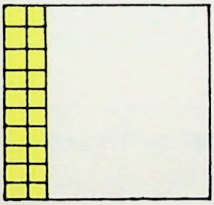
Essas atividades têm por finalidade fazer o aluno compreender que centésimos é o mesmo que por cento e habituá-lo ao uso desta nova expressão.

Através deste quadro os alunos poderão descobrir diferentes percentagens:

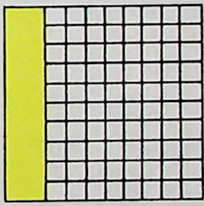
→ Descobrir que 20 quadradinhos representam $\frac{20}{100}$ ou 20 por cento ou $\frac{1}{5}$ do quadro todo.

$$\frac{20}{100} \underset{\div 20}{\overset{\div 20}{=}} \frac{1}{5} \qquad\qquad \frac{20}{100} = 20\%$$

Logo: $\frac{20}{100} = 20\% = \frac{1}{5}$ (quinta parte)

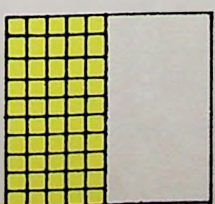


ou

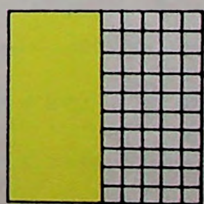


→ E ainda que 50 quadradinhos representam:

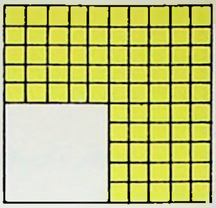
$$\frac{50}{100} \text{ ou } 50\% \text{ ou } \frac{1}{2}$$



ou



→ que 25 quadradinhos representam:



$$\frac{25}{100} = 25\% = \frac{1}{4} \text{ (quarta parte)}$$

$$\div 25$$

$$\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{25}{100} = 25\%\right)$$

$$\div 25$$

Assim, podemos interpretar informações envolvendo **algumas porcentagens** (10%, 20%, 25%, 50%) de uma forma bastante prática.

Exemplos:

O salário mínimo terá um aumento de 20% (20 por cento)

Que quer dizer isto?

Quer dizer que o salário mínimo terá um aumento igual a sua quinta parte.

Lembre que: $20\% = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

Faltaram à aula, hoje, 10% dos alunos.

$$\div 10$$

Sabemos que: $10\% = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$ (décima parte)

$$\div 10$$

Logo: Faltou à aula, hoje, a décima parte dos alunos da turma.

Assim: Se a turma a que nos referimos tem 50 alunos, teremos:

50 alunos ⟶ a turma (inteira)

10% de 50 será a décima parte de 50. Ou seja:

$50 \div 10 = 5$

A décima parte de 50 é 5.

Logo: 10% dos alunos da turma serão 5 alunos.

Estragaram-se 25% das sacas de alimentos.

Sabemos que: $25\% = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ (quarta parte).

Logo: Estragou-se a quarta parte das sacas de alimentos.

Assim: Vamos supor que temos 80 sacas.

80 sacas $\longrightarrow$ inteiro

25% de 80 será a quarta parte de 80, ou seja:

$80 \div 4 = 20$

A quarta parte de 80 é 20.

Logo, neste caso, podemos afirmar que:

Estragaram-se 20 sacas de alimentos.

Vamos, agora, trabalhar calculando porcentagens. Podemos organizar uma tabela de porcentagem da seguinte maneira:

	100	200	300	400	500
10%					
20%					
30%					
40%					
50%					
60%					
70%					
80%					
90%					
100%					

Já trabalhamos com algumas porcentagens: 10%, 20%, 50% e 100% e sabemos calculá-las de forma rápida:

$$10\% = \frac{1}{10} \longrightarrow \text{décima parte}$$

$$20\% = \frac{1}{5} \longrightarrow \text{quinta parte}$$

$$50\% = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{metade}$$

$$100\% = \frac{100}{100} \longrightarrow \text{inteiro}$$

Logo, podemos completar parte do quadro registrando alguns resultados:

	100	200	300	400	500
10%	10	20	30	40	50
20%	20	40	60	80	100
30%					
40%					
50%	50	100	150	200	250
60%					
70%					
80%					
90%					
100%	100	200	300	400	500

Prosseguindo:

Como calcular: 30% de 100 ou 30% de 200 etc.

Sabemos que: $30\% = \frac{30}{100}$

Logo: 30% de 100 é $\frac{30}{100}$ de 100 (inteiro)

Para calcular $\frac{30}{100}$ de um inteiro teremos que dividi-lo em 100 partes iguais (÷ 100) e tomar 30 dessas partes (× 30).

Então: $\underbrace{100}_{\text{inteiro}} \div \underbrace{100}_{\text{cem partes iguais}} = \underbrace{1}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 100.}}$

$\underbrace{1}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 100}} \times 30 = \underbrace{30}_{\text{30 centésimos do inteiro ou 30\% de 100}}$

Logo: 30% de 100 é 30.

E 30% de 200 ?

30% de 200 é $\frac{30}{100}$ de 200.

Logo: $\underbrace{200}_{\text{inteiro}} \div \underbrace{100}_{\text{cem partes iguais}} = \underbrace{2}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 200}}$

$\underbrace{2}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 200}} \times 30 = \underbrace{60}_{\text{30 centésimos do inteiro ou 30\% de 200}}$

Logo: 30% de 200 é 60.

Podemos prosseguir com o mesmo raciocínio para o cálculo de 30% de 300, 400 e 500 ou qualquer outra quantidade desejada.

O que fazemos:

$$30\% \text{ de } 300 = \underbrace{(300 \div 100)}_{3} \times 30 =$$

$$3 \times 30 = 90$$

Desta forma completaríamos mais uma parte do quadro:

	100	200	300	400	500
30%	30	60	90	120	150

Como calcular:

40% de 100 ou 40% de 200 etc...

Sabemos que: $40\% = \dfrac{40}{100}$

Logo: 40% de 100 é o mesmo que $\dfrac{40}{100}$ de 100.

Para calcular $\dfrac{40}{100}$ de uma quantidade precisamos dividi-la em 100 partes iguais e tomar 40 dessas partes.

Logo: $\underbrace{100}_{\text{inteiro}} \div \underbrace{100}_{\text{cem partes iguais}} = \underbrace{1}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 100}}$

$\underbrace{1}_{\text{1 centésimo do inteiro ou 1\% de 100}} \times 40 = \underbrace{40}_{\text{40 centésimos do inteiro ou 40\% de 100}}$

Logo: 40% de 100 é igual a 40

Com o mesmo raciocínio encontraríamos 40% de 200, 300, 400 e 500, completando, assim, mais uma parte do quadro.

	100	200	300	400	500
40%	40	80	120	160	200

Usando o mesmo raciocínio poderemos calcular 60%, 70%, 80% e 90% das quantidades pedidas, completando, assim, o nosso quadro:

	100	200	300	400	500
10%	10	20	30	40	50
20%	20	40	60	80	100
30%	30	60	90	120	150
40%	40	80	120	160	200
50%	50	100	150	200	250
60%	60	120	180	240	300
70%	70	140	210	280	350
80%	80	160	240	320	400
90%	90	180	270	360	450
100%	100	200	300	400	500

Através de variados exemplos o professor levará o aluno à resolução de cálculo de porcentagens:

> Para calcular porcentagem de uma quantidade, dividimos por 100 para achar um por cento — e depois multiplicamos pela quantidade do porcento.

Alguns exemplos:

→ Com a seca, 40% das nossas 350 hortaliças murcharam. Que porcentagem de hortaliças não murchou?

Como 40% murcharam e sabendo que 100% corresponde ao total, concluímos que 60% não murcharam.

Quantas hortaliças não murcharam?

Temos que calcular 60% de 350.

$$\underbrace{(350 \div 100)} \times 60 =$$

$$3{,}50 \times 60 = 210$$

$$\begin{array}{r} 3{,}50 \\ \times\ 60 \\ \hline 210{,}00 \end{array}$$

Então: 60% de 350 são 210.

Logo: 210 hortaliças não murcharam.

→ Temos em nossa sala de aula 25 alunos onde 52% são mulheres. Qual o número de alunos (mulheres) de nossa sala de aula?

Sabemos que:

25 → n.º de alunos da sala → total

52% dos alunos da turma são mulheres.

Logo, para calcular o número de alunas de nossa sala temos que calcular:

52% de 25

$$(\underbrace{25}_{\text{inteiro}} \div \underbrace{100)}_{\text{cem partes iguais}} \times 52 =$$

$$\underbrace{0{,}25}_{1\%\text{ de }25} \times 52 = 13$$

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ \times\ 52 \\ \hline 0\,50 \\ 12\,5 \\ \hline 13{,}00 \end{array} \text{ ou } 13$$

Temos em nossa sala de aula 13 alunas.

→ Paulo apanhou 300 laranjas. Colocou 25% delas numa cesta e as vendeu.

Quantas laranjas foram vendidas?

300 → quantidade total de laranjas
25% de 300 foram vendidas.

Mas sabemos que:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ (quarta parte)}$$

Logo, para calcular 25% de 300 temos apenas que calcular a quarta parte de 300.

$300 \div 4 = 75$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 4 \\ \hline 20 & 75 \\ 0 & \end{array}$$

25% de 300 é 75.

Paulo vendeu 75 laranjas.

Até aqui foi apenas explorado o cálculo de porcentagem.
Baseados no estudo feito poderemos responder a perguntas como estas:
→ Dos 500 alunos de uma escola apenas a **metade** compra merenda na própria escola. Quantos por cento dos alunos compram merenda na própria escola?

Acreditamos que a maioria dos alunos já estejam prontos para responder que metade é igual a 50%.

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$$

Portanto: 50% dos alunos compram merenda na própria escola.

→ Dos 400 operários de uma fábrica, 80 são mulheres. Quantos por cento representam as mulheres?

$\frac{80}{400}$ dos operários são mulheres.

Mas, podemos verificar a fração decimal com denominador 100 equivalente a $\frac{80}{400}$:

$$\frac{80}{400} \overset{\div 4}{\underset{\div 4}{=}} \frac{20}{100}$$

Como: $\frac{20}{100} = 20\%$

Temos que 20% dos operários são mulheres.

→ Em uma biblioteca havia 240 livros. Retiraram num mês 36 livros para ler. Quantos por cento de livros foram lidos?

36 dos 240 livros foram lidos.

Logo foram lidos $\frac{36}{240}$.

Procuremos a fração decimal (de denominador 100) equivalente a $\frac{36}{240}$.

$$\frac{36}{240} \underset{\div 12}{\overset{\div 12}{=}} \frac{3}{20} \underset{\times 5}{\overset{\times 5}{=}} \frac{15}{100} \qquad \frac{15}{100} = 15\%$$

Foram lidos 15% dos livros da biblioteca.

Podemos concluir que:

> Quando se tem uma quantidade e uma parte desta quantidade e desejamos saber a porcentagem a que corresponde esta parte em relação ao todo, precisamos calcular a fração decimal (denominador 100) equivalente à fração formada: $\frac{\text{parte da quantidade}}{\text{quantidade total}}$

Pode-se ainda organizar uma nova tabela onde veremos quantos por cento uma quantidade é de outra:

1	é 1% de	100	$\frac{1}{100} = 1\%$
40	é 25% de	160	$\frac{40}{160} = \frac{1}{4} = 25\%$
150	é 50% de	300	$\frac{150}{300} = \frac{1}{2} = 50\%$
14	é 2% de	700	$\frac{14}{700} = \frac{2}{100} = 2\%$
500	é 200% de	250	$\frac{500}{250} = 2 = \frac{200}{100} = 200\%$
120	é 20% de	600	$\frac{120}{600} = \frac{1}{5} = 20\%$
12	é 48% de	25	$\frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 48\%$

Ainda trabalhando com porcentagem poderíamos encontrar a seguinte situação: dada uma quantidade e a porcentagem que ela representa num todo, achar a quantidade total.

Na vida prática não há grande utilidade para o aparecimento de uma situação deste tipo.

Falaremos, portanto, nessa idéia apenas como curiosidade.

Exemplos:

$\longrightarrow$ Se 50% dos alunos de uma turma são 35, quantos alunos tem esta turma?

Lembrando que: $50\% = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$ (metade).

Então: A metade da turma tem 35 alunos. **Logo:** A turma toda terá 70 alunos.

$\longrightarrow$ Copiamos 25% de um trabalho, ou seja, 16 folhas. Quantas folhas tem o trabalho todo?

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ (quarta parte).}$$

Logo: A quarta parte é 16. Portanto o trabalho terá $16 \times 4 = 64$ folhas.

$\longrightarrow$ Carregamos 30% de sacas de alimentos, isto é, 240 sacas. Quantas sacas teremos carregado ao final do trabalho?

$$30 = \frac{30}{100}$$

$$\frac{30}{100} = 240$$

queremos saber quanto vale $\dfrac{100}{100}$.

Temos:

$$\frac{30}{100} = 240 \qquad \text{Como} \qquad \frac{1}{100} = 8 \qquad (240 \div 30 = 8)$$

$$\frac{100}{100} = 800 \qquad (8 \times 100 = 800)$$

Teremos carregado 800 sacas ao final do trabalho.

O professor poderá explorar bem, com exercícios variados, percentagem ao trabalhar com medidas de valor.

Sinais ou Símbolos	Escrita	Leitura
$\frac{a}{b}$	$\frac{5}{6}$	cinco sextos
F		Conjunto dos números fracionários
$\frac{1}{2}$	$6 = \frac{1}{2}$ de 12	6 é a metade de 12
$\frac{1}{3}$	$2 = \frac{1}{3}$ de 6	2 é a terça parte de 6
$\frac{1}{4}$	$5 = \frac{1}{4}$ de 20	5 é a quarta parte de 20
	$2,\underbrace{34}$ parte inteira — parte decimal	dois inteiros e trinta e quatro centésimos
%	40%	quarenta por cento.

NOTAS PARA O PROFESSOR

O professor deverá empregar os diferentes tipos de frações sem terminologia (aparente, própria, imprópria etc.).

As sentenças matemáticas refletirão situações problemáticas a serem resolvidas pelos alunos. Elas surgirão à medida que forem sendo estudadas as operações: adição — subtração e multiplicação — divisão.

Nas operações com números decimais devem ser seguidas as etapas de acordo com as dificuldades, evitando o uso de números "impraticáveis".

Relacionar percentagem a situação surgida na vida diária do aluno.

UNIDADE 6

MEDIDAS

OBJETIVOS

1. Operar com as medidas padronizadas e empregar as disposições legais relativas às mesmas, reconhecendo o valor prático.

2. Reconhecer e aplicar o vocabulário usual, relativo aos conceitos básicos de economia e finanças: imposto, cheques, juros, notas promissórias, avalista, investimentos, duplicata, etc.

3. Reconhecer o valor prático do dinheiro, identificando cédulas e moedas e operando com cruzeiros e centavos.

DESENVOLVIMENTO

INTRODUÇÃO

Constantemente falamos:
"Há **38** alunos em nossa sala de aula."
"A distância daqui até o armazém é de **250 metros.**"
"O comprimento deste lápis é de **30 centímetros.**"
"A massa desta quantidade de arroz é de **4 quilogramas.**"
"A superfície do Brasil é de **8.500.000 quilômetros quadrados.**"

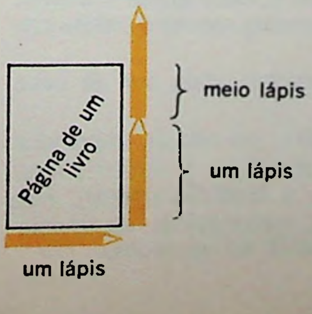
Tais frases envolvem medidas das mais diversas como: 38, 250, 30, 4, 8.500.000. Algumas envolvem também grandezas como: comprimento, massa, superfície.

Vão variando, assim, as **unidades de medida.** Em nossos exemplos, são unidades de medida: metro, centímetro, quilograma, quilômetro quadrado.

Desde a antiguidade surgiu a necessidade de medir.

Medir é comparar.

Por exemplo: Podemos **medir** o comprimento dos lados da página de um livro, comparando-o com o comprimento de um lápis.



Assim temos que um dos lados da página mede um lápis e meio, e o outro mede um lápis.

Medimos então o **comprimento** dos lados da página do livro, comparando-o com o **comprimento** do lápis. Do mesmo modo, podemos medir o **comprimento** do corredor da escola, comparando-o com o **comprimento** da sala de aula.

O que fizemos, então, foi comparar grandezas da mesma espécie, isto é, comparamos **comprimento** com **comprimento.**

Ao medirmos, devemos comparar as grandezas (comprimento, massa etc.) com outras da mesma espécie. Para isto, usamos as **unidades de medida.**

Por exemplo:

Comparamos o comprimento de uma sala com o comprimento do **metro.**
A massa de um saco de arroz com a massa do **quilograma.**
O volume de uma lata d'água com o volume do **metro cúbico.**
Metro, quilograma, metro cúbico, são as unidades de medida.

NOTA: No momento, estamos interessados apenas em esclarecer o que sejam grandezas, medidas, unidades de medida etc. Posteriormente nos deteremos no estudo das unidades de medida.

Destas comparações, resulta um número que é a **medida.**

Logo: **Medida** é o resultado da operação de medir (medição).

Desde épocas remotas, instrumentos de medir foram usados e medidas foram tomadas. É evidente que de modo grosseiro e imperfeito, mas as necessidades assim o exigiam.

Com o decorrer do tempo, apareceram diferentes medidas e instrumentos de medir, em conseqüência das necessidades da vida.

No início, os homens lançaram mão das próprias partes do seu corpo para medir o comprimento das coisas. Por exemplo: polegada, palmo, braço, pé etc.

Cada região possuía seu próprio sistema de medida constituindo as medidas regionais: cuia, pires, xícara, pé, palmo etc. Até hoje, estas medidas são empregadas no interior do Brasil.

Estas medidas, devido às diferenças individuais (tamanho dos pés, mãos, braços), raramente coincidiam. As quantidades que as medidas representavam variavam de lugar para lugar e isto ocasionava grandes divergências e discussões na comparação de grandezas da mesma espécie.

Surgiu, então, a necessidade de estabelecer unidades padronizadas com significado universal a fim de atender às necessidades de todos os países.

Após vários estudiosos se interessarem pelo assunto, surgiu o **Sistema Métrico Decimal,** isto é, conjunto de medidas derivadas do **metro,** que é a unidade-padrão.

Estabeleceu-se o **metro,** inicialmente, como uma medida de comprimento igual a um décimo milionésimo da distância entre o Pólo Norte e a linha do Equador, sobre um meridiano. Nesta época, os instrumentos de precisão não eram tão perfeitos quanto os de hoje e, de alguma maneira, foi cometido um erro na medida. Atualmente, há outra maneira mais correta para se estabelecer esta medida.

Muitos países adotaram o **Sistema Métrico Decimal,** visto ser de base decimal, idêntico ao sistema de numeração.

No Brasil, este sistema entrou em vigor, em 1874, por ato do Imperador D. Pedro II.

Existe um órgão: **Instituto Nacional de Pesos e Medidas** (INPM), cuja finalidade é promover a execução da **legislação metrológica,** supervisionando, orientando, fiscalizando a utilização do **sistema de unidades.**

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

O Sistema Métrico Decimal é o mais usado entre os povos e tem como unidade principal o **Metro** linear.

Como curiosidade, é interessante saber que o **Metro** padrão é uma barra de platina e irídio que corresponde fielmente ao comprimento de um metro e acha-se no Museu Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França.

Para medir um determinado comprimento, comparamos este comprimento com outro tomado como unidade de medida.

Quando dizemos que um objeto é grande, pesado, cheio, longo etc., estamos usando noções de medida, de maneira não muito precisa.

Com um melhor conhecimento de medidas começamos a fazer comparações entre objetos e situações e dizemos que: "João é mais alto que Maria." "Hoje está mais quente do que ontem" etc. Com a continuidade do estudo de medidas, podemos chegar a maior precisão e observar que: "O pai de Abigail é quase duas vezes maior que a filha."

Dessa forma se chega à precisão das medidas, às unidades-padrão, seus múltiplos e submúltiplos.

Metro: múltiplos e submúltiplos

Entre as unidades de medida, algumas são escolhidas como principais (ou padrão) das quais derivam outras maiores (múltiplos) e outras menores (submúltiplos), chamadas unidades secundárias.

Os principais múltiplos e submúltiplos do metro são:

QUILÔMETRO
HECTÔMETRO } **Múltiplos**
DECÂMETRO

METRO ——→ **Unidade Principal**

DECÍMETRO
CENTÍMETRO } **Submúltiplos**
MILÍMETRO

Relação decimal entre as medidas de comprimento

Os múltiplos do metro: decâmetro, hectômetro e quilômetro são, respectivamente, 10, 100, 1.000 vezes maiores que o metro, e os submúltiplos: decímetro, centímetro e milímetro são, respectivamente, 10, 100, 1.000 vezes menores que o metro. Por isso dizemos que há uma relação decimal entre as medidas de comprimento.

MÚLTIPLOS	QUILÔMETRO	— 1.000 metros	(mil vezes maior que o metro)
	HECTÔMETRO	— 100 metros	(cem vezes maior que o metro)
	DECÂMETRO	— 10 metros	(dez vezes maior que o metro)

SUBMÚLTIPLOS	DECIMETRO	— 0,1 do metro	(décima parte do metro — dez vezes menor que o metro)
	CENTIMETRO	— 0,01 do metro	(centésima parte do metro — cem vezes menor que o metro)
	MILIMETRO	— 0,001 do metro	(milésima parte do metro — mil vezes menor que o metro)

Representação, leitura e escrita

Os números que exprimem uma medida são escritos acrescentando-se à sua direita o símbolo da unidade correspondente.

SIMBOLOS DAS UNIDADES DE COMPRIMENTO

QUILÔMETRO	— km
HECTÔMETRO	— hm
DECAMETRO	— dam
METRO	— m
DECÍMETRO	— dm
CENTÍMETRO	— cm
MILÍMETRO	— mm

Como escreveríamos: quatro metros, trinta e quatro decímetros e sete quilômetros?

QUATRO METROS — 4 m

TRINTA E QUATRO DECÍMETROS — 34 dm

SETE QUILÔMETROS — 7 km

→ E "5 metros e 6 decímetros"?

Sabemos que:

O decímetro é a décima parte do metro.

($\frac{1}{10}$ do metro)

Logo:

6 decímetros são $\frac{6}{10}$ do metro

5 metros e mais $\dfrac{6}{10}$ do metro.

Temos uma parte inteira (5 metros) e uma parte decimal

($\dfrac{6}{10}$ do metro ou 6 decímetros).

Logo, usando notação decimal, poderíamos escrever:

5 , 6 m

inteiro décimos

metro decímetro

ATENÇÃO: O número 5,6 exprime uma medida. Acrescentamos, então, à sua direita, o símbolo da unidade correspondente a sua parte inteira metro.

→ E "8 metros e vinte e quatro centímetros"?

Como:

1 centímetro é a centésima parte do metro. ($\dfrac{1}{100}$ do metro)

Então: 24 centímetros são $\dfrac{24}{100}$ do metro.

Logo, temos que escrever:

8 metros e mais $\dfrac{24}{100}$ do metro.

Com notação decimal 8 , 2 4

inteiro décimos centésimos

m dm cm

→ E "6 quilômetros e 8 metros"?

1 metro é a milésima parte do quilômetro.

Então: 8 metros são $\dfrac{8}{1.000}$ do quilômetro.

Logo, vamos escrever:

6 quilômetros e mais $\dfrac{8}{1.000}$ do quilômetro. ou seja: 6,008 km

Acrescentamos à direita do número 6,008 o símbolo da unidade correspondente a sua parte inteira → quilômetro.

ATENÇÃO: Os símbolos das unidades de medir:

> — são escritos com letras minúsculas
>
> — não têm plural (3 m)
>
> — não têm ponto no final de sua escrita

A leitura das medidas é feita lendo-se a parte inteira do número decimal seguida do nome da unidade e a parte decimal do número seguida do nome da unidade correspondente. Exemplos:

25,01 hm — lê-se: vinte e cinco hectômetros e um metro

dam m

(pois: $1\text{ m} = \dfrac{1}{100}\text{ hm}$)

46,7 dm — lê-se: quarenta e seis decímetros e sete centímetros

cm

(pois: $1\text{ cm} = \dfrac{1}{10}\text{ dm}$)

0,809 m — lê-se: oitocentos e nove milímetros $\left(\dfrac{1}{1.000}\text{ do metro}\right)$

dm mm

cm

0,32 km — lê-se: trinta e dois decâmetros $\left(\dfrac{1}{100}\text{ do km}\right)$

hm dam

Aspecto prático da medida de comprimento

As medidas de comprimento são muito importantes no mundo atual. O seu uso é imprescindível em nossas vidas: no comércio, na indústria, nos meios de comunicação, no transporte etc.

Usamos o milímetro para dimensões muito pequenas como espessura de lâminas, papelão, espuma etc.

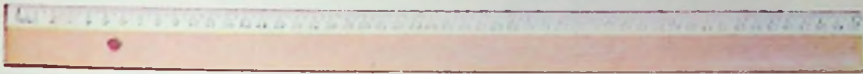
Usamos o centímetro para medir retalhos, desenhos, figuras geométricas, comprimento de roupa etc.

Usamos o milímetro para dimensões muito pequenas como espessura de lâminas, papelão, espuma etc.

Instrumentos para medir comprimento

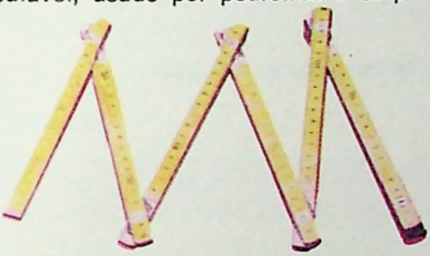
De acordo com o tamanho do comprimento e com a unidade de medida considerada, usamos instrumentos diferentes como:

— régua, usada para medir pequenos comprimentos

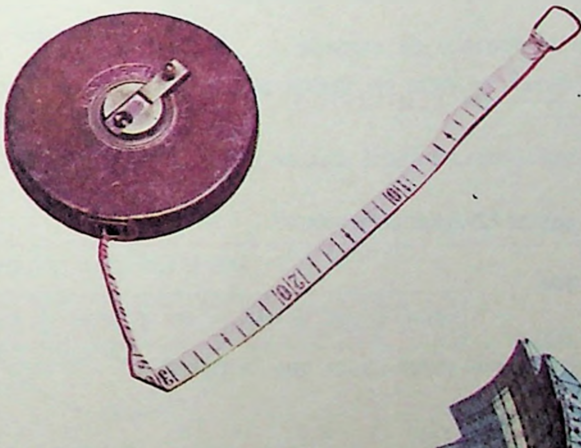


— fita métrica, usada por costureiros e alfaiates

— metro articulável, usado por pedreiros e carpinteiros



— trena para medir terrenos



— radar, usado para medir distâncias percorridas por navios, automóveis etc.

Operações envolvendo medidas de comprimento

Mudança de unidades

No estudo de medidas de comprimento trabalharemos com as operações: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Como só podemos adicionar e subtrair quantidades da mesma espécie, muitas vezes ao operarmos com medidas de comprimento precisaremos mudar de unidades.

Esta mudança de unidade é feita baseada nas seguintes afirmações:

Cada unidade de comprimento é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vezes menor que a unidade imediatamente superior.

Exemplos:

1) Em 4 metros há quantos centímetros?

Sabemos que:

1 m = 100 cm

Logo:

4 m = 400 cm

Fizemos uma mudança de unidade:

METRO ⟶ **CENTÍMETRO**

---

2) Como passar 129,6 km para metro?

Sabemos que:

1 km = 1.000 m
(o quilômetro é mil vezes maior que o metro)

Logo:

129,6 km = 129.600 m (129,6 × 1.000)

Fizemos uma mudança de unidade:

QUILÔMETRO ⟶ **METRO**

Nos dois exemplos apresentados, passamos de unidades de uma certa ordem para unidades de ordem menor.

O que podemos perceber?

As grandezas permanecem as mesmas, os numerais que as representam é que se tornam maiores:

4 ——► 400

129,6 ——► 129.600

Lembre-se que medida é apenas o número (sem as unidades).

Cada medida é um número que exige uma unidade de medida adequada.

Deslocamos a vírgula, para a direita, tantas casas decimais quantas forem as ordens entre a unidade dada e a unidade pedida:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Ex: 2 Ex: 1

Outros exemplos:

——► Reduzir 3,5 m a cm:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

3,5 m = 350 cm

ATENÇÃO: Sabemos que:

3,5 m = 3,50 m (lembrar propriedade de números decimais: 3,5 = 3,50)

Como precisamos deslocar a vírgula 2 ordens, acrescentamos um zero.

——► Reduzir 0,486 hm a dm

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

0,486 hm = 486 dm

——► Reduzir 6,3 km a m

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

6,3 = 6,300

6,300 km = 6.300 m

Vamos observar, agora, exemplos em que passamos de unidades de uma certa ordem para unidades de ordem maior.

1) Em 6.000 m há quantos quilômetros?

Sabemos que:

$1.000 \text{ m} = 1 \text{ km}$

$6.000 \div 1.000 = 6$

Logo:

$6.000 \text{ m} = 6 \text{ km}$

Fizemos uma mudança de unidade:

METRO ⟶ **QUILÔMETRO**

---

2) Como passar 10,7 cm a metro?

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ do metro (centésima parte do metro)}$$

Logo:

$10{,}7 \div 100 = 0{,}107$

$10{,}7 \text{ cm} = 0{,}107 \text{ m}$

Fizemos uma mudança de unidade:

CENTÍMETRO ⟶ **METRO**

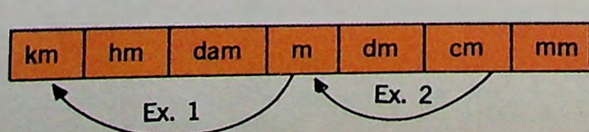
O que podemos perceber nos exemplos apresentados?

● As grandezas permanecem as mesmas, os numerais que as representam se tornaram menores:

6.000 ⟶ 6

10,7 ⟶ 0,107

Deslocamos a vírgula, para a esquerda, tantas casas decimais quantas forem as ordens entre a unidade dada e a unidade pedida.



Outros exemplos:

→ Reduzir 16,8 dm a m:

km	hm	dam	m	dm	cm	m

16,8 dm = 1,68 m

→ Reduzir 19 m a km:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

19m = 0,019 km

ATENÇÃO: Sabemos que: 19 = 0019

Como precisamos deslocar a vírgula 3 ordens para a esquerda, acrescentamos um zero para completar a parte decimal e outro zero indicando não ter parte inteira.

Adição

Se as medidas de comprimento são escritas em notação decimal, então, ao adicionarmos unidades de medida de comprimento, devemos lembrar as observações feitas no estudo de adição de números decimais.

Para adicionar medidas, escrevemos os números decimais com as unidades da mesma espécie, umas embaixo das outras, de modo que as unidades se correspondam. Em conseqüência, as vírgulas se correspondem (fica uma embaixo da outra). Adicionamos os números seguindo o que já foi aprendido para naturais e decimais. No resultado colocamos a vírgula em correspondência com as vírgulas das parcelas.

Exemplos:

→ 46,32 m + 53,8 m = ?

$$\begin{array}{r} 46{,}32\text{ m} \\ +\ 53{,}80\text{ m} \\ \hline 100{,}12\text{ m} \end{array}$$

Lembre-se que:

53,8 m = 53,80 m

46,32 m + 53,8 m = 100,12 m

→ 1,54 dam + 62,001 m = ?

Como só podemos adicionar medidas de mesma unidade, escolhemos uma das unidades para trabalhar: metro, por exemplo.

Precisamos, então, reduzir 1,54 dam para metro.

1.54 dam = 15,4 m

15.4 m + 62,001 m = 77,401 m

1,54 dam + 62,001 m = 77,401 m

$$\begin{array}{r} 15,400 \text{ m} \\ + \quad 62,001 \text{ m} \\ \hline 77,401 \text{ m} \end{array}$$

→ 0,7 dam + 0,98 km = ?

Unidade escolhida para trabalhar: dam

0,98 km = 98 dam

ATENÇAO: 98 dam = 98,0 dam

$$\begin{array}{r} 0,7 \text{ dam} \\ + \quad 98,0 \text{ dam} \\ \hline 98,7 \text{ dam} \end{array}$$

0,7 dam + 98 dam = 98,7 dam

0,7 dam + 0,98 km = 98,7 dam

Subtração

As observações feitas para a adição são válidas também para a subtração.

Exemplos:

→ 8,32 km — 5,79 km = 2,53 km

$$\begin{array}{r} 8,32 \text{ km} \\ - \quad 5,79 \text{ km} \\ \hline 2,53 \text{ km} \end{array}$$

→ 14,69 km — 7,08 hm = ?

Unidade escolhida: hm

Sabemos que: 14,69 km = 146,9 hm

ATENÇAO: 146,9 hm = 146,90 hm

$$\begin{array}{r} 146,90 \text{ hm} \\ - \quad 7,08 \text{ hm} \\ \hline 139,82 \text{ hm} \end{array}$$

Logo:

146,9 hm — 7,08 hm = 139,82 hm

14,69 km — 7,08 hm = 139,82 hm

→ 83,4 dm — 0,9 m = ?

Unidade escolhida: m

Sabemos que: 83,4 dm = 8,34 m

Temos que: 0,9 m = 0,90 m

$$\begin{array}{r} 8{,}34\text{ m} \\ -\ 0{,}90\text{ m} \\ \hline 7{,}44\text{ m} \end{array}$$

8,34 m — 0,90 m = 7,44 m

83,4 dm — 0,9 m = 7,44 m

Multiplicação

Ao multiplicarmos uma medida de comprimento por um número decimal devemos lembrar as observações feitas no estudo de multiplicação de números decimais:

- Multiplicamos os fatores como se fossem números naturais.
- O resultado terá tantas casas decimais quanto for a **soma** do número de casas decimais dos fatores.

ATENÇÃO: O resultado terá a mesma unidade de comprimento da medida dada como fator.

Lembre-se que:

6 laranjas x 2 = 12 laranjas

7 bolas x 10 = 70 bolas

Logo:

5 metros x 6 = 30 metros

Exemplos:

→ 4,13 m × 4 = 16,52 m

$$\begin{array}{r} 4{,}13\text{ m} \\ \times\quad 4 \\ \hline 16{,}52\text{ m} \end{array}$$

→ 25,7 km × 6,1 = 156,77 km

$$\begin{array}{r} 25{,}7\ \text{km} \\ \times\quad 6{,}1 \\ \hline 257 \\ 1542 \\ \hline 156{,}77\ \text{km} \end{array}$$

→ 56,02 dm × 0,8 = 44,816 dm

$$\begin{array}{r} 56{,}02\ \text{dm} \\ \times\quad 0{,}8 \\ \hline 44{,}816\ \text{dm} \end{array}$$

Divisão

Como as medidas de comprimento são escritas em notação decimal, vamos lembrar as observações feitas quando do estudo de divisão com números decimais:

- O número de casas decimais do dividendo deve ser maior ou igual ao número de casas decimais do divisor.
- A divisão é feita como se fossem números naturais.
- O quociente terá tantas casas decimais quanto for a diferença do número de casas decimais do dividendo e divisor.

Devemos, também, chamar atenção para dois fatos importantes:

1.º Ao dividirmos uma medida de comprimento por um número decimal, o quociente terá sempre a mesma unidade do dividendo.

Observe os exemplos:

→ Se eu quiser dividir **10 metros** de fazenda por 5 pessoas igualmente, sabemos que cada pessoa irá receber **2 metros** de fazenda.

Ou seja: 10 m ÷ 5 = 2 m

→ Como efetuar 2,46 km ÷ 3 = ?

$$\begin{array}{l|l} 2{,}46\ \text{km} & 3 \\ \cline{2-2} \ \ 06 & 0{,}82\ \text{km} \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Então:

2,46 km ÷ 3 = 0,82 km

2.º Quando dividimos uma medida de comprimento por outra de mesma unidade obtemos sempre, no quociente, um número sem unidade de medida.

Observe o exemplo:

→ Quero repartir uma peça de fazenda de 50 m em pedaços de 5 m. Quantos pedaços obterei?

Para respondermos a esta pergunta, precisamos saber quantas vezes 5 m está em 50 m. Logo, obterei no quociente este número de vezes, que é a quantidade de pedaços de 5 metros.

50 m ÷ 5 m = 10

Obterei 10 pedaços. Logo o quociente é um número sem unidades.

→ E como resolver: 186 m ÷ 31 m = ?

186 m	31 m
00	6

Logo: 186 m ÷ 31 m = 6

Vejamos algumas divisões com medidas de comprimento:

→ 279 dam ÷ 3 = ?

279	3
09	93
0	

Logo: 279 dam ÷ 3 = 93 dam

→ 31,20 mm ÷ 5,2 = ?

31,20	5,2
00	6,0

Logo: 31,20 mm ÷ 5,2 = 6 mm

→ 75,03 dm ÷ 4,1 dm = ?

```
75,03 | 4,1
34 0    18,3
  1 2 3
    0 0
```

Logo: 75,03 dm ÷ 4,1 dm = 18,3

→ 24 hm ÷ 1,5 km = ?

Só podemos operar com medidas da mesma unidade.

Unidade escolhida: km

Mas, sabemos que: 24 hm = 2,4 km

```
2,4 | 1,5          ou ainda:   2,40 | 1,5
  9   1                          00   1,6
```

2,4 km ÷ 1,5 km = 1,6

24 hm ÷ 1,5 km = 1,6

Operando com medidas de comprimento

→ Comprei 4,5 m de fazenda para fazer uma cortina. Precisei comprar mais 1,8 m para terminá-la. Quantos metros desta fazenda comprei ao todo?

4,5 m + 1,8 m = ?

```
Como:    4,5 m
       + 1,8 m
       -------
         6,3 m
```

Então: 4,5 m + 1,8 m = 6,3 m

Comprei 6,3 m de fazenda.

→ O passo de um homem mede cerca de 0,80 m. Quantos passos ele dará para percorrer 2,4 km?

Devemos então saber quantas vezes 0,80 m cabe em 2,4 km.

A sentença que nos dará a resposta é: 2,4 km ÷ 0,80 m = □

Para efetuarmos, devemos trabalhar com a mesma unidade de medida. Passando km para metro, teremos:

2,4 km = 2.400 m

```
2.400,00 | 0,80
      00   3.000
```

Então: □ = 3.000

Logo: Ele dará 3.000 passos.

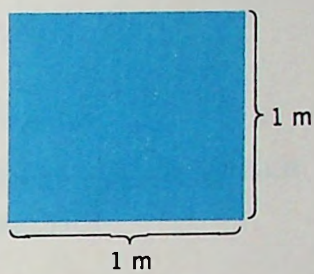
MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

O metro quadrado

Superfície é uma grandeza de duas dimensões. A área é a medida desta grandeza.

A unidade principal das medidas de superfície é o **metro quadrado,** que é a área de um quadrado de 1 m de lado.

A parte pintada da figura é a superfície do quadrado.



Símbolo do metro quadrado: m^2

Assim: 1 m^2 é a área do quadrado acima.

O expoente 2 representa as duas dimensões da superfície: comprimento (1 m) e largura (1 m).

Múltiplos e submúltiplos

Podemos também medir superfícies empregando unidades secundárias.

Os principais múltiplos e submúltiplos do metro quadrado são:

QUILOMETRO QUADRADO
HECTOMETRO QUADRADO
DECAMETRO QUADRADO
} **MÚLTIPLOS**

METRO QUADRADO → **UNIDADE PRINCIPAL**

DECÍMETRO QUADRADO
CENTÍMETRO QUADRADO
MILÍMETRO QUADRADO
} **SUBMÚLTIPLOS**

Relação centesimal entre as unidades de superfície

Os múltiplos do metro quadrado: decâmetro quadrado, hectômetro quadrado e quilômetro quadrado são, respectivamente, 100, 10.000, 1.000.000 de vezes maiores que o metro quadrado e os submúltiplos: decímetro quadrado, centímetro quadrado e milímetro quadrado são, respectivamente, 100, 10.000, 1.000.000 de vezes menores do que o metro quadrado. Por isto, dizemos que há uma relação centesimal entre as medidas de superfície, pois cada unidade é cem vezes maior que a unidade imediatamente inferior.

MÚLTIPLOS	QUILÔMETRO QUADRADO	— **1.000.000 de metros quadrados**
	HECTÔMETRO QUADRADO	— **10.000 metros quadrados**
	DECAMETRO QUADRADO	— **100 metros quadrados**

SUBMÚLTIPLOS	DECÍMETRO QUADRADO	— **0,01 do metro quadrado**
	CENTÍMETRO QUADRADO	— **0,0001 do metro quadrado**
	MILÍMETRO QUADRADO	— **0,000001 do metro quadrado**

Representação, leitura e escrita

SIMBOLOS DAS UNIDADES DE SUPERFICIE:

QUILÔMETRO QUADRADO	— km^2
HECTÔMETRO QUADRADO	— hm^2
DECAMETRO QUADRADO	— dam^2
METRO QUADRADO	— m^2
DECÍMETRO QUADRADO	— dm^2
CENTÍMETRO QUADRADO	— cm^2
MILIMETRO QUADRADO	— mm^2

Como escreveríamos:

→ Sete quilômetros quadrados?

7 km^2

→ Seis quilômetros quadrados e trinta e dois hectômetros quadrados?

Sabemos que:

O hectômetro quadrado é a centésima parte do quilômetro quadrado ($\frac{1}{100}$ do km^2).

Logo:

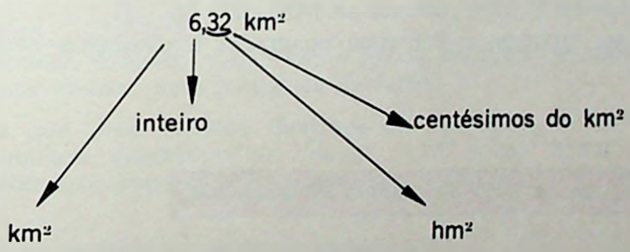
32 hectômetros quadrados são $\frac{32}{100}$ do quilômetro quadrado.

Então, temos que escrever:

Seis quilômetros quadrados e mais $\frac{32}{100}$ do quilômetro quadrado.

Temos uma parte inteira (6 quilômetros) e uma parte decimal ($\frac{32}{100}$ do quilômetro quadrado ou 32 hm^2).

Logo, usando notação decimal, escreveríamos:



→ Oito metros quadrados e seis decímetros quadrados?

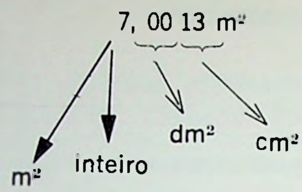
O decímetro quadrado é a centésima parte do metro quadrado.

Então: seis decímetros quadrados são $\frac{6}{100}$ do metro quadrado

Temos uma parte inteira (oito metros quadrados) e uma parte decimal ($\frac{6}{100}$ do metro quadrado ou 6 decímetros quadrados).

Usando notação decimal, teremos: 8,06 m^2

→ Sete metros quadrados e treze centímetros quadrados?



A leitura das medidas de superfície é feita lendo-se a parte inteira do número decimal seguida do nome da unidade e a parte decimal do número seguida do nome da unidade à qual corresponde.

Exemplos:

12 km^2 — lê-se: doze quilômetros quadrados

4 m^2 — lê-se: quatro metros quadrados

32,85 dm^2 — lê-se: trinta e dois decímetros quadrados e oitenta e cinco centímetros quadrados

OBSERVAÇÃO: As unidades de superfície variam de 100 em 100, então os números decimais que exprimem as medidas de superfície devem possuir um número par de algarismos na parte decimal. Se não possuírem, acrescentam-se ou suprimem-se zeros para facilitar os cálculos e a leitura. Em vez de se escrever 14,5 km^2, escreva-se: 14,50 km^2.

Lê-se: quatorze quilômetros quadrados e cinqüenta hectômetros quadrados.

Aspecto prático da medida de superfície

Não se pode negar a crescente importância das medidas no mundo atual. Esta importância está diretamente ligada ao seu largo uso. O uso das medidas é constante.

As medidas de superfície praticamente nos dão: áreas de salas, quartos, casas, terrenos, sítios, fazendas, campos, regiões, estados, países etc.

Medidas agrárias

As medidas agrárias visam a medir as superfícies de terras concentrando as unidades de superfície do Sistema Métrico Decimal nas três mais usuais: m^2, dam^2, hm^2.

A unidade agrária principal é o **Are.**

MÚLTIPLO → **HECTARE**

SUBMÚLTIPLO → **CENTIARE**

UNIDADE	**SÍMBOLOS**	**VALOR CORRESPONDENTE**	
Hectare	ha	hectômetro quadrado	10.000 m^2
Are	a	decâmetro quadrado	100 m^2
Centiare	ca	metro quadrado	1 m^2

múltiplo: hectare — ARE — submúltiplo: centiare

1 ha = 100 a

1 ca = 0,01 a

ATENÇÃO: Deve-se empregar o hectare (ha) nas medidas de superfície das fazendas, sítios etc.

O alqueire é uma medida de superfície muito usada, mas não é a ideal, pois: não é unidade oficial, além de variar de valor em diversos Estados brasileiros.

Operações envolvendo medidas de superfície

Mudança de unidade

Vamos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir medidas de superfície, logo precisaremos muitas vezes mudar de unidades.

Sabendo-se que uma unidade qualquer de superfície é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 100 vezes menor que a unidade imediatamente superior, vamos dar alguns exemplos de mudança de unidade.

1. Em 32 km^2 há quantos hectômetros quadrados?

Sabemos que:

1 km^2 = 100 hm^2

Logo:

32 km^2 = 3.200 hm^2
(32 × 100)

Fizemos uma mudança de unidade:

QUILÔMETRO QUADRADO → HECTÔMETRO QUADRADO

2. Em 18,35 m^2 há quantos dam^2?
Sabemos que:

$100 \ m^2 = 1 \ dam^2$

Logo:

$18{,}35 \ m^2 = 0{,}183.5 \ dam^2$
$(18{,}35 \div 100)$

Fizemos uma mudança de unidade.

METRO QUADRADO ————→ DECÂMETRO QUADRADO

Podemos ter uma visualização com os quadros a seguir:

Exemplo 1:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Exemplo 2:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Concluindo:

Para passar de uma unidade de uma certa ordem para outra unidade de ordem imediatamente menor (ou maior) desloca-se a vírgula duas casas para a direita (ou esquerda).

Exemplos:

→ Reduzir 23,3140 dam^2 a m^2

Devemos passar para uma unidade imediatamente inferior (m^2); logo, basta deslocar a vírgula duas casas para a direita.

$23{,}314 \ dam^2 = 2.331{,}40 \ m^2$

→ Reduzir 386,20 m^2 a hm^2

Devemos passar para duas unidades imediatamente superiores (dam^2 e hm^2); logo, deslocamos a vírgula quatro casas para a esquerda.

$386{,}20 \ m^2 = 0{,}038.62 \ hm^2$

ATENÇAO: Como deslocamos a vírgula quatro casas para a esquerda precisamos colocar zeros para indicar ausência de inteiros (hm^2) e de uma casa decimal.

→ Reduzir 18,52 km^2 a m^2

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
18	52	00	00			

Devemos passar para três unidades imediatamente inferiores (hm^2, dam^2, m^2); logo, deslocamos a vírgula seis casas para a direita.

18,52 km^2 = 18.520.000 m^2

A mudança de unidade entre medidas agrárias é feita da mesma forma, isto é, deslocando-se a vírgula duas casas, pois as medidas agrárias são medidas de superfície.

→ Reduzir 812,51 a para ca.

1 a = 100 ca

Logo:

812,51 a = 81.251 ca

→ Reduzir 3,24 a a ha.

$$1\ a = \frac{1}{100} \text{ do ha.}$$

Logo:

3,24 a = 0,032.4 ha

(3,24 ÷ 100)

→ Reduzir 6.000 m^2 a ha

ha = hm^2

Temos então que passar de m^2 para hm^2

6.000 m^2 = 0,60 hm^2

(6.000 ÷ 10.000)

ou

6.000 m^2 = 0,60 ha

NOTA: Só podemos operar com medidas na mesma unidade. Por este motivo, introdùzimos inicialmente a mudança de unidade.

Adição

Para adicionar medidas, escrevemos os números decimais com as unidades de mesma espécie, umas embaixo das outras, de modo que as unidades se correspondam. Em conseqüência, as vírgulas ficam se correspondendo.

Adicionam-se os números como se fossem naturais e coloca-se a vírgula, no resultado, em correspondência com as vírgulas das parcelas.

Exemplos:

→ $32,46 \text{ m}^2 + 8,53 \text{ m}^2 = 40,99 \text{ m}^2$

$$\begin{array}{r} 32,46 \text{ m}^2 \\ + \quad 8,53 \text{ m}^2 \\ \hline 40,99 \text{ m}^2 \end{array}$$

→ $6,54 \text{ dam}^2 + 171,33 \text{ m}^2 = ?$

Escolhemos uma unidade para operarmos e transformamos a outra para esta unidade escolhida: dam^2, por exemplo

$171,33 \text{ m}^2 = 1,7133 \text{ dam}^2$

$6,54 \text{ dam}^2 + 1,7133 \text{ dam}^2 = 8,2533 \text{ dam}^2$

ATENÇÃO: $6,54 = 6,5400$

$6,54 \text{ dam}^2 + 171,33 \text{ m}^2 = 8,2533 \text{ dam}^2$

$$\begin{array}{r} 6,5400 \text{ dam}^2 \\ + \quad 1,7133 \text{ dam}^2 \\ \hline 8,2533 \text{ dam}^2 \end{array}$$

→ $5 \text{ ha} + 842 \text{ a} = ?$

Unidade escolhida: ha

$842\text{a} = 8,42 \text{ ha}$

ATENÇAO $5 = 5,00$

$5 \text{ ha} + 8,42 \text{ ha} = 13,42 \text{ ha}$

$5 \text{ ha} + 842 \text{ a} = 13,42 \text{ ha}$

$$\begin{array}{r} 5,00 \text{ ha} \\ + \quad 8,42 \text{ ha} \\ \hline 13,42 \text{ ha} \end{array}$$

Subtração

A subtração se comporta da mesma maneira que a adição.

Exemplos:

→ $514{,}88\ m^2 - 53{,}17\ m^2 = 461{,}71\ m^2$

$$\begin{array}{r} 514{,}88\ m^2 \\ -\quad 53{,}17\ m^2 \\ \hline 461{,}71\ m^2 \end{array}$$

→ $0{,}54\ dam^2 - 3{,}12\ m^2 = ?$

Unidade escolhida: m^2

$0{,}54\ dam^2 = 54\ m^2$

$54\ m^2 - 3{,}12\ m^2$

$$\begin{array}{r} 54{,}00\ m^2 \\ -\quad 3{,}12\ m^2 \\ \hline 50{,}88\ m^2 \end{array}$$

Logo:

$54\ m^2 - 3{,}12\ m^2 = 50{,}88\ m^2$

$0{,}54\ dam^2 - 3{,}12\ m^2 = 50{,}88\ m^2$

→ 16,46 ha — 435,20 a = ?

435,20 a = 4,3520 ha

Como: 16,46 = 16,4600

Logo: 16,46 ha — 4,3520 ha = 12,1080 ha.

$$\begin{array}{r} 16{,}4600\ \text{ha} \\ -\quad 4{,}3520\ \text{ha} \\ \hline 12{,}1080\ \text{ha} \end{array}$$

16,46 ha — 435,20 a = 12,108 ha

Multiplicação

Ao multiplicarmos com medidas de superfície empregaremos as técnicas. já mencionadas no estudo de números decimais.

Lembre-se: Usamos as mesmas técnicas que para multiplicar medidas de comprimento.

Exemplos:

→ $3{,}14\ m^2 \times 4 = 12{,}56\ m^2$

$$\begin{array}{r} 3{,}14\ m^2 \\ \times\quad 4 \\ \hline 12{,}56\ m^2 \end{array}$$

→ $42{,}51\ km^2 \times 3{,}8 = 161{,}5380\ km^2$

$$\begin{array}{r} 42{,}51\ km^2 \\ \times\quad 3{,}8 \\ \hline 34008 \\ 12753 \\ \hline 161{,}538\ km^2 \end{array}$$

→ 4,5 ha × 2,3 = 10,35 ha

$$\begin{array}{r} 4{,}5\ \text{ha} \\ \times\quad 2{,}3 \\ \hline 135 \\ 90 \\ \hline 10{,}35\ \text{ha} \end{array}$$

Divisão

Lembrando as técnicas usadas na divisão com números decimais, vamos dividir com medidas de superfície:

→ $23{,}80\ m^2 \div 3{,}50 = 6{,}80\ m^2$

Lembrando que: $23{,}80 = 23{,}8000$

$$\begin{array}{l|l} 23{,}8000 & 3{,}50 \\ \hline 2\,800 & 6{,}80 \\ \quad 000 & \end{array}$$

→ $75{,}03\ a \div 41 = 1{,}83\ a$

$$\begin{array}{l|l} 75{,}03 & 41 \\ \hline 34\,0 & 1{,}83 \\ \ \ 1\,23 & \\ \quad\ \ 0 & \end{array}$$

Para se dividir medida por medida deve-se ter o cuidado de reduzi-las à mesma unidade de medida, antes de operar, quando necessário.

Exemplos:

→ $31{,}20\ a \div 5{,}2\ a = ?$

$$\begin{array}{l|l} 31{,}20 & 5{,}2 \\ \hline \quad 00 & 6{,}0 \end{array}$$

Como: $6{,}0 = 6$

$31{,}20\ a \div 5{,}2\ a = 6$

→ $2.400\ hm^2 \div 1{,}50\ km^2 = ?$

$1{,}50\ km^2 = 150\ hm^2$

$2.400\ hm^2 \div 150\ hm^2 = 16$

$\therefore 2.400\ hm^2 \div 1{,}50\ km^2 = 16$

$$\begin{array}{l|l} 2.400 & 150 \\ \hline \ \ 900 & 16 \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

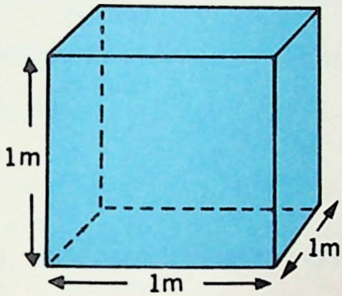
MEDIDAS DE VOLUME

O metro cúbico

Os objetos que ocupam uma certa porção do espaço de três dimensões são os sólidos.

O volume é a medida destes sólidos.

A unidade principal das medidas de volume é o metro cúbico, que é o volume de um cubo de 1 m de aresta.



Símbolo do metro cúbico: m^3

O expoente 3 representa as três dimensões do sólido: comprimento, largura e altura.

Múltiplos e submúltiplos

Podemos também medir volumes empregando unidades secundárias.

Os principais múltiplos e submúltiplos do metro cúbico são:

QUILÔMETRO CÚBICO
HECTÔMETRO CÚBICO
DECÂMETRO CÚBICO
} **MÚLTIPLOS**

METRO CÚBICO ⟶ **UNIDADE PRINCIPAL**

DECÍMETRO CÚBICO
CENTÍMETRO CÚBICO
MILÍMETRO CÚBICO
} **SUBMÚLTIPLOS**

Relação milesimal entre medidas de volume

Os múltiplos do metro cúbico são 1.000, 1.000.000, 1.000.000.000 vezes maiores que o metro cúbico e os submúltiplos 1.000, 1.000.000, 1.000.000.000 vezes menores que o metro cúbico.

Por isto, dizemos que há uma relação milesimal entre as medidas de volume, pois cada unidade é mil vezes maior que a unidade imediatamente inferior.

MÚLTIPLOS	QUILÔMETRO CÚBICO	— 1.000.000.000 metros cúbicos
	HECTÔMETRO CÚBICO	— 1.000.000 metros cúbicos
	DECAMETRO CÚBICO	— 1.000 metros cúbicos

SUBMÚLTIPLOS	DECÍMETRO CÚBICO	— 0,001 do metro cúbico
	CENTÍMETRO CÚBICO	— 0,000001 do metro cúbico
	MILÍMETRO CÚBICO	— 0,000000001 do metro cúbico

Representação, leitura e escrita

SÍMBOLOS DAS UNIDADES DE VOLUME:

QUILÔMETRO CÚBICO	— km^3
HECTÔMETRO CÚBICO	— hm^3
DECAMETRO CÚBICO	— dam^3
METRO CÚBICO	— m^3
DECÍMETRO CÚBICO	— dm^3
CENTÍMETRO CÚBICO	— cm^3
MILÍMETRO CÚBICO	— mm^3

A leitura das medidas de volume é feita lendo-se a parte inteira do número decimal seguida do nome da unidade e a parte decimal do número seguida do nome da unidade à qual corresponde.

Exemplos:

82 m^3 — lê-se: oitenta e dois metros cúbicos

4,415 dm^3 — lê-se: quatro decimetros cúbicos e quatrocentos e quinze centímetros cúbicos.

OBSERVAÇAO: As unidades de volume variam de 1.000 em 1.000, então os números decimais que exprimem as medidas de volume devem possuir um número de casas decimais que seja múltiplo de 3 na parte decimal. Se não possuírem, acrescentam-se ou suprimem-se zeros.

Em vez de se escrever 15,42 m^3, escreve-se: 15,420 m^3

Lê-se: quinze metros cúbicos e quatrocentos e vinte decímetros cúbicos.

Outro exemplo:

13,074 km^3

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 3	0 7 4					

Lê-se: treze quilômetros cúbicos e setenta e quatro hectômetros cúbicos.

Aspecto prático da medida

As medidas de volume são da maior importância e grande uso.

São empregadas para medir volumes de sólidos como caixa-d'água, tanque, latão de leite, pipa d'água etc.

Volume aparente de lenha

A lenha empilhada deixa muitos vazios. Para medi-la usamos o estéreo que corresponde ao metro cúbico.

Símbolo do estéreo: st

NOTA: O professor poderá falar nesta unidade apenas como curiosidade.

$$\boxed{1\ st = 1\ m^3}$$

Embora exista uma unidade própria para medir a lenha (que é o estéreo), em muitos lugares ela é vendida ou comprada por unidades.

Mudança de unidade

metro cúbico: seus múltiplos e submúltiplos

Sabendo-se que cada uma dessas unidades de volume é 1.000 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 1.000 vezes menor que a unidade imediatamente superior: Passa-se de uma unidade para outra unidade de ordem imediatamente menor (ou maior), deslocando-se a vírgula três casas para a direita (ou esquerda).

Exemplos:

→ Reduzir 2,815 dm^3 a cm^3

Devemos passar para uma unidade imediatamente inferior (cm^3); logo, basta deslocar a vírgula três casas para a direita.

$$2{,}815\ dm^3 = 2.815\ cm^3$$

→ Reduzir 376,452 dm^3 a m^3

Devemos passar para uma unidade imediatamente superior (m^3); logo, basta deslocar a vírgula três casas para a esquerda.

$$376{,}452\ dm^3 = 0{,}376452\ m^3$$

NOTA: Colocamos um zero indicando ausência da parte inteira (m^3).

Operações

NOTA: Valem para as operações com medidas de volume todas as observações feitas nos estudos das unidades de medidas apresentadas até agora.

Adição

→ $48{,}523 m^3 + 131\ m^3 = ?$

ATENÇÃO: $131\ m^3 = 131{,}000\ m^3$

$48{,}523\ m^3 + 131\ m^3 = 179{,}523\ m^3$

$$\begin{array}{r} 48{,}523\ m^3 \\ +\ 131{,}000\ m^3 \\ \hline 179{,}523\ m^3 \end{array}$$

→ $3{,}452\ m^3 + 12\ dam^3 = ?$

Unidade escolhida: m^3

$12\ dam^3 = 12.000\ m^3$
(12×1.000)

$$\begin{array}{r} 3{,}452\ m^3 \\ +\ 12.000\ \quad m^3 \\ \hline 12.003{,}452\ m^3 \end{array}$$

$3{,}452\ m^3 + 12.000\ m^3 = 12.003{,}452\ m^3$

Então: $3{,}452\ m^3 + 12\ dam^3 = 12.003{,}452\ m^3$

Subtração

→ $352{,}472\ dm^3 - 148{,}121\ dm^3 = ?$

$$\begin{array}{r} 352{,}472\ dm^3 \\ -\ 148{,}121\ dm^3 \\ \hline 204{,}351\ dm^3 \end{array}$$

$352{,}472\ dm^3 - 148{,}121\ dm^3 = 204{,}351\ dm^3$

→ $4{,}520\ m^3 - 215\ dm^3 = ?$

Unidade escolhida: dm^3

$4{,}520\ m^3 = 4.520\ dm^3$

$4.520\ dm^3 - 215\ dm^3 = 4.305\ dm^3$

$$\begin{array}{r} 4.520\ dm^3 \\ -\ \ 215\ dm^3 \\ \hline 4.305\ dm^3 \end{array}$$

$4{,}520\ m^3 - 215\ dm^3 = 4.305\ dm^3$

Multiplicação

→ $5{,}32\ m^3 \times 7 = ?$

$$\begin{array}{r} 5{,}32\ m^3 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 37{,}24\ m^3 \end{array}$$

$5{,}32\ m^3 \times 7 = 37{,}24\ m^3$

→ $32{,}12\ dam^3 \times 8 = ?$

$$\begin{array}{r} 32{,}12\ dam^3 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 256{,}96\ dam^3 \end{array}$$

$32{,}12\ dam^3 \times 8 = 256{,}96\ dam^3$

Divisão

→ $64{,}500\ cm^3 \div 2\ cm^3 = ?$

$$\begin{array}{l|l} 64{,}500 & 2 \\ \cline{2-2} 04 & 32{,}250 \\ \ \ 05 & \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 00 & \end{array}$$

$64{,}500\ cm^3 \div 2\ cm^3 = 32{,}250$

→ $3\ dam^3 \div 6\ m^3 = ?$

Unidade escolhida: m^3

$3\ dam^3 = 3.000\ m^3$

$$\begin{array}{r|l} 3.000 & 6 \\ \cline{2-2} 000 & 500 \end{array}$$

$3.000\ m^3 \div 6\ m^3 = 500$

Litro

O **litro** é uma unidade de medida de volume. Ele é empregado para medir volumes de recipientes que contenham líquidos, gases etc.

O volume de um litro equivale aproximadamente a 1 dm^3,

1 LITRO = 1 DECÍMETRO CÚBICO

Símbolo do litro: ℓ

Múltiplos e submúltiplos

Podemos também medir volumes empregando unidades secundárias.

Os principais múltiplos e submúltiplos do litro são:

QUILOLITRO HECTOLITRO DECALITRO	**MÚLTIPLOS**
LITRO ⟶	**UNIDADE PRINCIPAL**
DECILITRO CENTILITRO MILILITRO	**SUBMÚLTIPLOS**

Relação decimal

Os múltiplos do litro: decalitro, hectolitro, quilolitro são, respectivamente: 10, 100, 1.000 vezes maiores que o litro e os submúltiplos: decilitro, centilitro e mililitro são, respectivamente: 10, 100, 1.000 vezes menores que o litro. Por isto, dizemos que há uma relação decimal entre as medidas de volume (litro).

MÚLTIPLOS	QUILOLITRO —	**1.000 litros**
	HECTOLITRO —	**100 litros**
	DECALITRO —	**10 litros**
SUBMÚLTIPLOS	DECILITRO —	**0,1 do litro**
	CENTILITRO —	**0,01 do litro**
	MILILITRO —	**0,001 do litro**

Representação, leitura e escrita

SÍMBOLOS DAS UNIDADES DE VOLUME: (LITRO)

QUILOLITRO	—	kℓ
HECTOLITRO	—	hℓ
DECALITRO	—	daℓ
LITRO	—	ℓ
DECILITRO	—	dℓ
CENTILITRO	—	cℓ
MILILITRO	—	mℓ

Como escreveríamos:

→ Dezoito litros? 18 ℓ

→ Dois litros e três decilitros?

Sabemos que:

O decilitro é a décima parte do litro: $\frac{1}{10}$ do litro.

Então:

Três decilitros são $\frac{3}{10}$ do litro.

Temos que escrever:

Dois litros e mais $\frac{3}{10}$ do litro.

Existe uma parte inteira (2 litros) e uma parte decimal ($\frac{3}{10}$ do litro ou 3 decilitros).

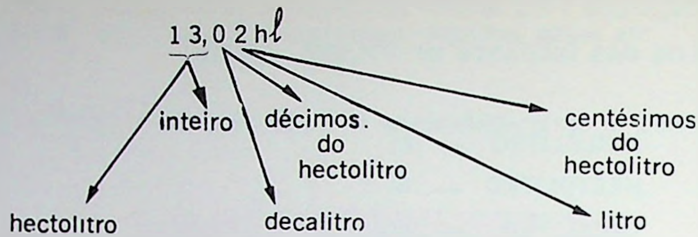
Usando notação decimal

2,3 litros

inteiro — litro

décimos do litro — decilitro

Treze hectolitros e dois litros



A leitura das medidas é feita lendo-se a parte inteira do número decimal seguida do nome da unidade e a parte decimal seguida do nome da unidade à qual corresponde.

Exemplos:

4,98 ℓ — lê-se: quatro litros e noventa e oito centilitros

0,916 ℓ — lê-se: novecentos e dezesseis mililitros

32,4 daℓ — lê-se: trinta e dois decalitros e quatro litros

Mudança de unidade

litro: seus múltiplos e submúltiplos

Sabendo-se que cada uma dessas unidades de volume é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vezes menor que a unidade imediatamente superior, passa-se de uma unidade para outra unidade de ordem imediatamente menor (ou maior), deslocando-se a vírgula uma casa para a direita (ou esquerda).

Exemplos:

Reduzir 65,43 ℓ a dℓ

Devemos passar para uma unidade imediatamente inferior (dℓ); deslocamos a vírgula uma casa para a direita.

65,43 ℓ = 654,3 dℓ

Reduzir 40,5 cℓ a ℓ

Devemos passar para duas unidades imediatamente superiores (dℓ e ℓ); basta deslocar a vírgula duas casas para a esquerda.

40,5 cℓ = 0,405 ℓ

NOTA: Colocamos zero para indicar ausência de parte inteira (litro).

→ Reduzir 22,5 ℓ a cℓ

Devemos passar para duas unidades imediatamente inferiores (dℓ e cℓ); basta deslocar a vírgula duas casas para a direita.

$22,5\,\ell = 2.250\,c\ell$

NOTA: Lembrando observação feita para números decimais: $22,5 = 22,50$

O decímetro cúbico e o litro

Sabendo-se que: $1\,dm^3 = 1\,\ell$ vamos a alguns exemplos:

→ Reduzir $8\,m^3$ a ℓ

$8\,m^3 = 8.000\,dm^3$ Então: $8\,m^3 = 8.000\,\ell$

→ Reduzir $35\,d\ell$ a dm^3

$35\,d\ell = 3,5\,\ell$ $3,5\,\ell = 3,5\,dm^3$ Logo: $35\,d\ell = 3,5\,dm^3$

Operações

Adição

→ $982\,\ell + 706,3\,\ell = 1.688,3\,\ell$

ATENÇÃO: $982\,\ell = 982,0\,\ell$

$$\begin{array}{r} 982,0\,\ell \\ +\ 706,3\,\ell \\ \hline 1.688,3\,\ell \end{array}$$

$982\,\ell + 706,3\,\ell = 1.688,3\,\ell$

→ $4.708,1\,c\ell + 942,6\,\ell = ?$

Unidade escolhida: litro

$4.708,1\,c\ell = 47,081\,\ell$

$47,081\,\ell + 942,6\,\ell = 989,681\,\ell$

$4.708,1\,c\ell + 942,6\,\ell = 989,681\,\ell$

$$\begin{array}{r} 47,081\,\ell \\ +\ 942,600\,\ell \\ \hline 989,681\,\ell \end{array}$$

Subtração

→ $48,030\,da\ell - 13,920\,da\ell = ?$

$$\begin{array}{r} 48,030\,da\ell \\ -\ 13,920\,da\ell \\ \hline 34,110\,da\ell \end{array}$$

$48,030\,da\ell - 13,920\,da\ell = 34,110\,da\ell$

→ $8{,}52\ \ell - 0{,}8\ da\ell = ?$

Unidade escolhida: ℓ

$0{,}8\ da\ell = 8\ \ell \quad (0{,}8 \times 10)$

ATENÇÃO: $8\ \ell = 8{,}00\ \ell$

$8{,}52\ \ell - 8{,}00\ \ell = 0{,}52\ \ell$

$8{,}52\ \ell - 0{,}8\ da\ell = 0{,}52\ \ell$

$$\begin{array}{r} 8{,}52\ \ell \\ -\ 8{,}00\ \ell \\ \hline 0{,}52\ \ell \end{array}$$

Multiplicação

→ $4{,}6\ c\ell \times 2{,}1 = ?$

$4{,}6\ c\ell \times 2{,}1 = 9{,}66\ c\ell$

$$\begin{array}{r} 4{,}6\ c\ell \\ \times\ 2{,}1 \\ \hline 46 \\ 92\ \ \\ \hline 9{,}66\ c\ell \end{array}$$

→ $0{,}75\ \ell \times 8 = ?$

Note que: $6{,}00\ \ell = 6\ \ell$

$0{,}75\ \ell \times 8 = 6\ \ell$

$$\begin{array}{r} 0{,}75\ \ell \\ \times\ \ 8 \\ \hline 6{,}00\ \ell \end{array}$$

Divisão

→ $42{,}56\ \ell \div 7 = ?$

$42{,}56\ \ell \div 7 = 6{,}08\ \ell$

$$\begin{array}{r|l} 42{,}56 & 7 \\ \cline{2-2} 0\ 56 & 6{,}08 \\ 0 & \end{array}$$

→ $3{,}78\ c\ell \div 2\ m\ell = ?$

Unidade escolhida: $c\ell$

$2\ m\ell = 0{,}2\ c\ell \quad (2 \div 10)$

$3{,}78\ c\ell \div 0{,}2\ c\ell = 18{,}9$

$3{,}78\ c\ell \div 2\ m\ell = 18{,}9$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}78\ c\ell & 0{,}2\ c\ell \\ \cline{2-2} 17\ \ \ \ & 18{,}9 \\ 18\ \ \ & \\ 0\ \ \ & \end{array}$$

Situações práticas envolvendo volume

→ Um negociante comprou, em barris, 46 $da\ell$ de vinho e já vendeu 2,3 $h\ell$. Quantos litros possui ainda?

Tinha: 46 $da\ell$

Vendeu: 2,3 $h\ell$

Possui ainda: $\square$

Sentença matemática: $46\ da\ell - 2{,}3\ h\ell = \square$

Unidade escolhida: ℓ

$46\ da\ell = 460\ \ell$

$2{,}3\ h\ell = 230\ \ell$

$$\begin{array}{r} 460\ \ell \\ -\ 230\ \ell \\ \hline 230\ \ell \end{array}$$

Possui ainda: 230 ℓ

→ Quantos vasilhames de 5 $d\ell$ são necessários para engarrafar a bebida que está num recipiente de volume igual a 8,5 ℓ?

Precisamos saber quantas vezes 5 $d\ell$ está em 8,5 ℓ, ou seja:

$\square \times 5\ d\ell = 8{,}5\ \ell$

$\square = 8{,}5\ \ell \div 5\ d\ell$

Unidade escolhida: litro

$5\ d\ell = 0{,}5\ \ell$

Logo: $\square = 8{,}5\ \ell \div 0{,}5\ \ell$

$\square = 17$

$$\begin{array}{r|l} 8{,}5 & 0{,}5 \\ \cline{2-2} 3\,5 & 17 \\ 0 & \end{array}$$

São necessários 17 vasilhames.

→ Uma caixa tem 1 m^3 de volume. Pergunta-se: quantos litros de água pode conter?

Sabemos que: $1\ dm^3 = 1\ \ell$

Como: $1\ m^3 = 1.000\ dm^3$

e

$1.000\ dm^3 = 1.000\ \ell$

A caixa pode conter 1.000 ℓ de água.

MEDIDAS DE MASSA

Quando soltamos no ar objetos, eles caem no solo. Existe uma força que os obriga a cair. Esta força é a atração que a Terra exerce sobre os objetos, conhecida como força gravitacional.

Peso de um corpo é a força gravitacional exercida sobre ele pela Terra.

Massa de um corpo é a quantidade de matéria que este corpo contém.

A força gravitacional varia de lugar para lugar, logo o **peso** também **varia.** A quantidade de matéria de um corpo é sempre a mesma em qualquer lugar, logo a **massa não varia.** Por exemplo, o peso de uma pessoa na Lua é cerca de seis vezes menor que seu peso aqui na Terra, enquanto a sua massa é sempre a mesma (na Terra ou na Lua).

O quilograma

A unidade fundamental das medidas de massa é o quilograma.

Símbolo do quilograma: kg

Grama: Múltiplos e Submúltiplos

A unidade principal usada na prática é o **grama.** Os múltiplos e submúltiplos para as medidas de massa são considerados em relação ao grama.

Os principais múltiplos e submúltiplos do grama são:

$$\left.\begin{array}{l}\text{QUILOGRAMA}\\ \text{HECTOGRAMA}\\ \text{DECAGRAMA}\end{array}\right\}\ \textbf{MÚLTIPLOS}$$

$$\text{GRAMA} \longrightarrow \textbf{UNIDADE PRINCIPAL}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{DECIGRAMA}\\ \text{CENTIGRAMA}\\ \text{MILIGRAMA}\end{array}\right\}\ \textbf{SUBMÚLTIPLOS}$$

Relação decimal entre as medidas de massa

Os múltiplos do grama — decagrama, hectograma e quilograma — são, respectivamente, 10, 100, 1.000 vezes maiores que o grama e os submúltiplos — decigrama, centigrama e miligrama — são, respectivamente, 10, 100, 1.000 vezes menores que o grama. Daí, haver uma relação decimal entre as medidas de massa.

MÚLTIPLOS	QUILOGRAMA	—	1 000 gramas
	HECTOGRAMA	—	100 gramas
	DECAGRAMA	—	10 gramas

SUBMÚLTIPLOS	DECIGRAMA	—	0,1 do grama
	CENTIGRAMA	—	0,01 do grama
	MILIGRAMA	—	0,001 do grama

Representação, leitura e escrita

SÍMBOLOS DAS UNIDADES DE MASSA:

QUILOGRAMA — kg
HECTOGRAMA — hg
DECAGRAMA — dag
GRAMA — g
DECIGRAMA — dg
CENTIGRAMA — cg
MILIGRAMA — mg

Como escreveríamos:

→ Dez quilogramas?
10 kg

→ Oito quilogramas e duzentos e cinqüenta gramas?
O grama é a milésima parte do quilograma.
Então:

Duzentos e cinqüenta gramas são $\frac{250}{1.000}$ do quilograma

Temos uma parte inteira (oito quilogramas) e uma parte decimal ($\frac{250}{1.000}$ do quilograma ou 250 gramas.)

Usando notação decimal: 8,250 kg

→ Dez gramas e cinco decigramas?

10,5 g

g inteiro dg décimos do grama

A leitura das medidas de massa é feita lendo-se a parte inteira do número decimal seguida do nome da unidade e a parte decimal do número seguida do nome da unidade à qual corresponde.

Exemplos:

8 kg — lê-se: oito quilogramas

351 g — lê-se: trezentos e cinqüenta e um gramas

25,6 cg — lê-se: vinte e cinco centigramas e seis miligramas

NOTA: A unidade grama é considerada masculina.

Portanto, temos:

500 g — lê-se: quinhentos gramas

200 g — lê-se: duzentos gramas

1 g — lê-se: um grama etc...

Outras medidas de massa:

Existem outros múltiplos e submúltiplos de unidades de massa muito usados:

MÚLTIPLOS

tonelada	—	t	—	1 t = 1.000 kg
arroba	—		—	1 arroba = 15 kg

SUBMÚLTIPLOS

quilate	—		—	1 quilate = 0,2g

OBSERVAÇÕES:

1. O quilate é usado para medir a massa de pedras e metais preciosos.

2. Destas unidades de massa apresentadas: tonelada, arroba e quilate, o professor deverá dar destaque somente à tonelada pelo seu uso na vida prática.

Aspecto prático da medida

Trabalhamos com medidas de massa a todo instante, daí seu grande valor prático.

Medimos a massa de pessoas, alimentos, remédios, objetos, malas de viagem, automóveis, caminhões etc.

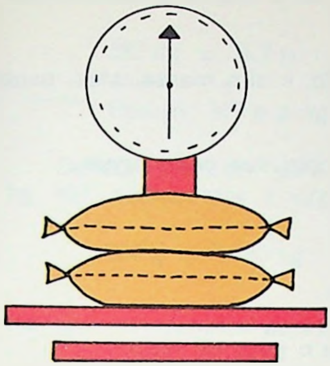
Instrumentos para medir massa:

Na prática, a medida de massa é feita por balanças que variam de acordo com a quantidade de massa.

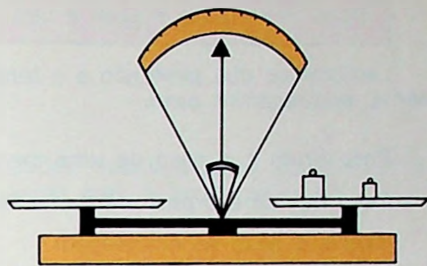
Emprega-se usualmente a palavra **peso** para significar **massa.** Fala-se vulgarmente em pesagem ao invés de medição de massa. Ex.: Quando uma pessoa diz: "Eu peso 60 kg" está usando o termo "peso", quando na realidade 60 kg corresponde à sua massa.

Tipos de balança:

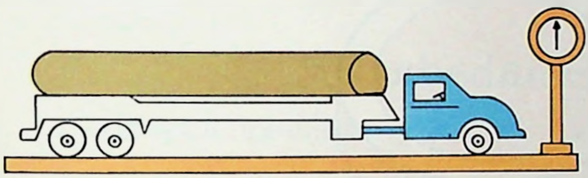
Balanças mais usadas no comércio:



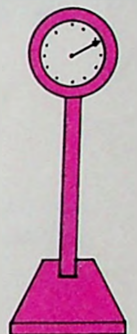
Balança do tipo báscula



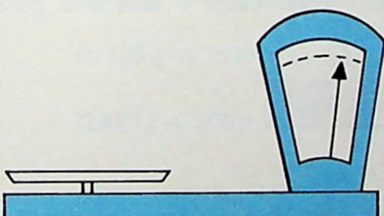
Balança do tipo Roberval



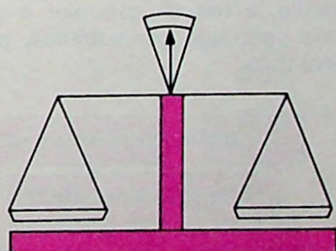
Balança do tipo ponte báscula



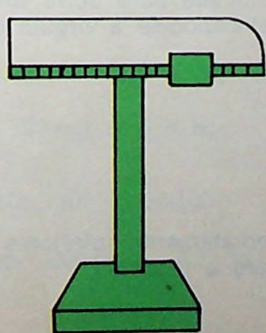
Balança para pessoas



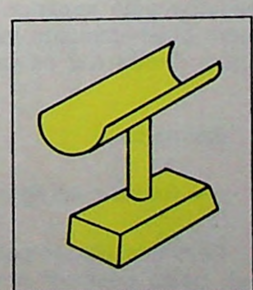
Balança automática



Balança de pratos suspensos



Balança de médico



Balança para pesar nenen

NOTA: Os nomes e tipos de balanças poderão ser apresentados apenas como curiosidade.

Peso bruto, peso líquido e tara

Lembramos que peso não é o termo correto, e sim massa. Mas, usualmente, empregamos peso.

Peso bruto é o peso de uma mercadoria com sua embalagem.

Peso líquido é o peso da mercadoria.

Tara é o peso da embalagem.

Por exemplo: numa lata de goiabada lê-se:

peso bruto: 400 g (inclui o peso da goiabada e o peso da lata).

peso líquido: 320 g (só o peso da goiabada).

Concluímos que a tara (lata vazia) pesa 80 g.

Nos veículos de transporte de carga, a tara figura escrita no próprio veículo, a fim de controlar o peso da carga, tendo em vista o peso máximo permitido por estradas, pontes etc. Neste caso, a tara é o peso do caminhão.

Operações envolvendo medidas de massa

Mudança de unidade

Sabendo-se que uma unidade qualquer de massa é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vezes menor que a unidade imediatamente superior: Passa-se de uma unidade para outra unidade de ordem imediatamente menor (ou maior), deslocando-se a vírgula uma casa para a direita (ou esquerda).

Exemplos:

→ Reduzir 4,5 kg a g

Devemos passar para três unidades imediatamente inferiores (hg, dag e g); basta deslocar a vírgula três casas para a direita.

4,5 kg = 4.500 g

ATENÇÃO: 4,5 = 4,500 — lembrar propriedade de números decimais.

→ Reduzir 387 dg a g

Devemos passar para uma unidade imediatamente superior (g); logo, deslocamos a vírgula uma casa para a esquerda.

387 dg = 38,7 g

→ Reduzir 250 g a kg

Devemos passar para três unidades imediatamente superiores (dag, hg, kg); deslocamos a vírgula três casas para a esquerda.

250 g = 0,250 kg

NOTA: Precisamos acrescentar zero, indicando não ter parte inteira (kg).

Valem para as operações com medidas de massa todas as observações feitas nos estudos das unidades de medida apresentadas até agora.

Adição

→ 0,6 dag + 3,15 dag = ?

ATENÇÃO: 0,6 = 0,60

$$\begin{array}{r} 0{,}60 \text{ dag} \\ +\ 3{,}15 \text{ dag} \\ \hline 3{,}75 \text{ dag} \end{array}$$

0,6 dag + 3,15 dag = 3,75 dag

→ 32,42 kg + 800 g

Unidade escolhida: grama

32,42 kg = 32.420 g

32.420 g + 800 g = 33.220 g

$$\begin{array}{r} 32.420 \text{ g} \\ +\ 800 \text{ g} \\ \hline 33.220 \text{ g} \end{array}$$

32,42 kg + 800 g = 33.220 g

→ 200 dg + 720 mg = ?

Unidade escolhida: dg

720 mg = 7,20 dg

ATENÇÃO: 200 = 200,00

Logo: 200 dg + 7,20 dg = 207,20 dg

$$\begin{array}{r} 200{,}00 \text{ dg} \\ +\ 7{,}20 \text{ dg} \\ \hline 207{,}20 \text{ dg} \end{array}$$

200 dg + 720 mg = 207,20 dg

Subtração

→ $85\ g - 79\ g = ?$

$85\ g - 79\ g = 6\ g$

$$\begin{array}{r} 85\ g \\ -\ \ 79\ g \\ \hline 6\ g \end{array}$$

→ $0{,}123\ dag - 5\ dg = ?$

Unidade escolhida: dg

$0{,}123\ dag = 12{,}3\ dg$

$$\begin{array}{r} 12{,}3\ dg \\ -\ \ 5{,}0\ dg \\ \hline 7{,}3\ dg \end{array}$$

ATENÇÃO: $5 = 5{,}0$

Logo: $12{,}3\ dg - 5\ dg = 7{,}3\ dg$

$0{,}123\ dag - 5\ dg = 7{,}3\ dg$

→ $7{,}5\ kg - 1\ hg = ?$

Unidade escolhida: kg

$$\begin{array}{r} 7{,}5\ kg \\ -\ \ 0{,}1\ kg \\ \hline 7{,}4\ kg \end{array}$$

$1\ hg = 0{,}1\ kg$

Logo: $7{,}5\ kg - 0{,}1\ kg = 7{,}4\ kg$

$7{,}5\ kg - 1\ hg = 7{,}4\ kg$

Multiplicação

→ $72{,}47\ cg \times 4 = ?$

$72{,}47\ cg \times 4 = 289{,}88\ cg$

$$\begin{array}{r} 72{,}47\ cg \\ \times\ \ \ \ \ 4\ \ \ \\ \hline 289{,}88\ cg \end{array}$$

→ $3{,}5\ mg \times 1{,}9 = ?$

$3{,}5\ mg \times 1{,}9 = 6{,}65\ mg$

$$\begin{array}{r} 3{,}5\ mg \\ \times\ \ 1{,}9\ \ \ \ \\ \hline 315\ \ \ \ \\ 35\ \ \ \ \ \\ \hline 6{,}65\ mg \end{array}$$

→ $250\ g \times 0{,}12 = ?$

$$\begin{array}{r} 250\ g \\ \times\ \ 0{,}12\ \ \\ \hline 500\ \ \\ 250\ \ \ \ \\ \hline 30{,}00\ g \end{array}$$

Como: $30{,}00 = 30$

Logo: $250\ g \times 0{,}12 = 30\ g$

Divisão

→ $800\ g \div 4 = ?$

$800\ g \div 4 = 200\ g$

$$\begin{array}{r|l} 800 & 4 \\ \hline 000 & 200 \end{array}$$

→ $38{,}45\ kg \div 0{,}5 = ?$

$38{,}45\ kg \div 0{,}5 = 76{,}9\ kg$

$$\begin{array}{r|l} 38{,}45 & 0{,}5 \\ \hline 3\,4 & 76{,}9 \\ 45 & \\ 0 & \end{array}$$

→ $7.000\ cg \div 100\ mg =$

Unidade escolhida: cg

$100\ mg = 10\ cg$

$7.000 \div 10 = 700$

Logo: $7.000\ cg \div 10\ cg = 700$

$7.000\ cg \div 100\ mg = 700$

Situações de vida prática envolvendo medidas de massa

→ Quantos sacos de 250 g serão necessários para ensacar 10 kg de sal?

$\square$ = quantidade de sacos

$250\ g \times \square = 10\ kg$

$\square \times 250\ g = 10\ kg$

$\square = 10\ kg \div 250\ g$

$10\ kg = 10.000\ g$

Então:

$\square = 10.000\ g \div 250\ g$

$$\begin{array}{r|l} 10.000 & 250 \\ \hline 0\ 00 & 40 \end{array}$$

$\square = 40$ Serão necessários 40 sacos

→ José "pesa" 35,5 kg e Carlos "pesa" 34,5 kg. Quem "pesa" mais?

Sabemos que $35{,}5 > 34{,}5$

Logo: $35{,}5\ kg > 34{,}5\ kg$

Então José "pesa" mais que Carlos.

MEDIDAS DE TEMPO

Hora, minuto e segundo

A unidade fundamental das medidas de tempo é o segundo.

Símbolo do segundo: s

MÚLTIPLOS DO SEGUNDO	SÍMBOLOS	CORRESPONDÊNCIA
Minuto Hora	min h	60s 3.600s ou 60min

Relação sexagesimal entre as medidas

As unidades de tempo têm as seguintes relações:

1h = 60min 1min = 60s

Há, portanto, uma relação sexagesimal entre as unidades de tempo.

A contagem do tempo é feita na base sessenta. Exemplo: sessenta segundos constituem um minuto.

Representação, leitura e escrita

A representação da medida que indica unidades de tempo é feita escrevendo-se o número da medida e à sua direita o símbolo da unidade correspondente. Exemplos: 4h lê-se: quatro horas; 30s lê-se: trinta segundos; 7d lê-se: sete dias; 45min lê-se: quarenta e cinco minutos.

Quando a medida envolver mais de um tipo de unidade escreve-se os numerais correspondentes às diversas unidades em ordem decrescente de valor, acompanhados dos respectivos símbolos.

Exemplos:

8h15min — lê-se: oito horas e quinze minutos

3d 5h12min — lê-se: três dias, cinco horas e doze minutos

30min8s — lê-se: trinta minutos e oito segundos

ATENÇÃO: Nunca usamos vírgula (,) ou dois pontos (:) para separar as unidades de medidas de tempo. A vírgula é usada apenas no sistema decimal (base 10) e as medidas de tempo são do sistema de base 60.

Outras formas de medir o tempo.

O dia é também um múltiplo do segundo.

Um **dia** tem vinte e quatro horas ou 1.440 minutos ou 86.400 segundos.

Uma semana tem sete dias: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e sábado.

Uma quinzena tem quinze dias.

Os **meses** têm 28, 29, 30 ou 31 dias.

Um **ano** tem doze meses ou 365 dias e algumas horas.

Meses do ano:

JANEIRO	—	31 dias
FEVEREIRO	—	28 dias
		29 dias, quando bissexto
MARÇO	—	31 dias
ABRIL	—	30 dias
MAIO	—	31 dias
JUNHO	—	30 dias
JULHO	—	31 dias
AGOSTO	—	31 dias
SETEMBRO	—	30 dias
OUTUBRO	—	31 dias
NOVEMBRO	—	30 dias
DEZEMBRO	—	31 dias

Pela variação do número de dias dos meses, comercialmente considera-se um mês tendo 30 (trinta) dias.

Falamos que um ano tem 365 dias e algumas horas.

De 4 em 4 anos, estas horas formam um dia, que é acrescentado ao mês de fevereiro, que passa a ter, neste ano, 29 dias. Logo, o ano ficará com 366 dias denominando-se **ano bissexto.**

O ano comercial possui 360 dias.

Um século tem 100 anos e um milênio, 1.000 anos.

MÚLTIPLOS DO DIA

NOMES	CORRESPONDÊNCIA
Semana	7 dias
Quinzena	15 dias
Mês Civil	28, 29, 30 ou 31 dias
Mês Comercial	30 dias
Ano Civil	365 dias
Ano Bissexto	366 dias
Ano Comercial	360 dias

MÚLTIPLOS DO MÊS

NOMES	CORRESPONDÊNCIA
Bimestre	2 meses
Trimestre	3 meses
Semestre	6 meses

MÚLTIPLOS DO ANO

NOMES	CORRESPONDÊNCIA
Biênio	2 anos
Triênio	3 anos
Qüinqüênio ou Lustro	5 anos
Decênio ou década	10 anos
Século	100 anos
Milênio	1.000 anos

Instrumentos de medir: relógios, ampulheta

O mundo inteiro depende de horários. E para isto, o homem construiu instrumentos de medir o tempo.

Surgiram os primeiros relógios:

Relógio de sol: uma haste vertical presa a uma superfície plana; à medida que o sol se desloca, a sombra da haste vertical sobre a superfície também se desloca, determinando períodos do dia.

Relógio de água: vasilha cheia d'água com uma abertura na base por onde pouco a pouco escoa o líquido; à medida que a água desce, a "hora" fica sendo conhecida.

Ampulheta: instrumento composto de dois vasos de vidro que se comunicam por um pequeno orifício e que serve para medir o tempo, deixando passar certa porção de areia muito fina, do vaso superior para o inferior.

Calendário: é um folheto indicando as divisões do ano em meses, semanas e dias.

Leitura de calendário

JANEIRO							mês
D	S	T	Q	Q	S	S	dias da semana
	1	2	3	4	5	6	
7	8	9	10	11	12	13	
14	15	16	17	18	19	20	dias do mês
21	22	23	24	25	26	27	
28	29	30	31				

A leitura deste calendário é muito simples. Se você quiser saber em que dia da semana será o dia 18 de janeiro, procure o número 18 no calendário, e logo acima, na mesma coluna, está o dia da semana correspondente ao dia 18 (quinta-feira).

MEDIDAS DE VELOCIDADE

Se um caminhão percorreu 240 km de uma estrada em 3 horas, podemos dizer que ele percorreu aproximadamente 80 km em 1 hora.

Dizemos, então, que a **velocidade** do caminhão foi de 80 km/h (lê-se: 80 km por hora).

Logo, ao darmos a velocidade de um veículo, devemos dizer quantos quilômetros aproximadamente ele percorreu em 1 hora.

Podemos usar, também, outras unidades de comprimento e de tempo, mas na vida prática, usamos constantemente o km (quilômetro) e a h (hora).

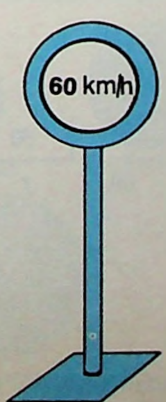
Assim, a unidade de velocidade mais usada é o quilômetro por hora, cujo símbolo é km/h (lê-se quilômetro por hora)

Velocímetro

Velocímetro é o instrumento destinado a medir velocidade.

Aspecto prático da medida

Cada meio de transporte alcança uma determinada velocidade. Nas estradas e vias urbanas, encontra-se a velocidade permitida em placas sinalizadoras.

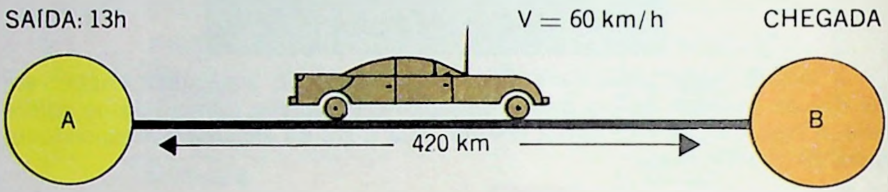


NOTA: Na maioria das vezes encontramos nas estradas e vias urbanas placas sinalizadoras onde a unidade de velocidade quilômetro por hora aparece escrita errada. A notação certa é a que se vê à esquerda.

Quando nos deslocamos de um lugar para outro podemos prever, aproximadamente, o tempo a gastar, se soubermos a velocidade do veículo e a distância a ser percorrida.

Por exemplo:

Imaginemos que vamos nos deslocar de automóvel da cidade **A** para a cidade **B**. Sabendo-se que a velocidade do automóvel será de 60 km/h e que a distância da cidade **A** para a cidade **B** é de 420 km, podemos calcular quantas horas gastaremos no trajeto.



Em uma hora percorreremos, aproximadamente, a distância de 60 km.

Em duas horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 120 km (2 × 60 km = 120km).

Em três horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 180 km (3 × 60 km = 180 km).

Em quatro horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 240 km (4 × 60 km = 240 km).

Em cinco horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 300 km (5 × 60 km = 300 km).

Em seis horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 360 km (6 × 60 km = 360 km).

Em sete horas percorreremos, aproximadamente, a distância de 420 km (7 × 60 km = 420 km).

Procuramos o número (tempo a gastar) que multiplicado por 60 (número que representa a velocidade) dê 420 (número que representa a distância): □ × 60 = 420.

Efetuamos a operação:

□ = 420 ÷ 60

□ = 7

$$\begin{array}{r|l} 420 & 60 \\ \hline 00 & 7 \end{array}$$

Gastaremos 7 horas no percurso, aproximadamente.

MEDIDA DE VALOR

O conhecimento do valor do dinheiro já é assunto dominado pelos alunos. É também de grande importância o conhecimento do Sistema Monetário Brasileiro.

O Sistema Monetário é sujeito a modificações.

Atualmente a unidade do Sistema Monetário Brasileiro é o **CRUZEIRO.**

O cruzeiro e o centavo

A unidade do nosso Sistema Monetário tem como símbolo Cr$.

A centésima parte do cruzeiro denomina-se **CENTAVO.**

1 cruzeiro = 100 centavos.

Cédulas e moedas

O **cruzeiro** e o **centavo** são apresentados em **cédulas** de papel-moeda e **moedas metálicas.**

CÉDULAS

1 CRUZEIRO

50 CRUZEIROS

5 CRUZEIROS

100 CRUZEIROS

10 CRUZEIROS

500 CRUZEIROS

MOEDAS:

1 CENTAVO

2 CENTAVOS

5 CENTAVOS

10 CENTAVOS

20 CENTAVOS

50 CENTAVOS

1 CRUZEIRO

Leitura e escrita

A representação de qualquer quantia é feita com notação decimal. O total de cruzeiros é escrito à esquerda da vírgula e o total de centavos à direita da vírgula. Toda vez que não houver centavos, colocamos dois zeros à direita da vírgula; e, toda vez que não houver cruzeiros, colocamos um zero à esquerda da vírgula.

Podemos escrever as quantias por extenso ou simbolicamente.

Exemplo:

CÉDULA DE 5 CRUZEIROS

MOEDA DE 20 CENTAVOS

Escrevemos:
- cinco cruzeiros e vinte centavos
- Cr$ 5,20

Outros exemplos:

Cr$ 10,00 ⟶ lê-se: dez cruzeiros
Cr$ 0,50 ⟶ lê-se: cinqüenta centavos
Cr$ 0,25 ⟶ lê-se: vinte e cinco centavos
Cr$ 1,30 ⟶ lê-se: um cruzeiro e trinta centavos
Cr$ 32,85 ⟶ lê-se: trinta e dois cruzeiros e oitenta e cinco centavos.
Cr$ 590,00 ⟶ lê-se: quinhentos e noventa cruzeiros.

Operações envolvendo medida de valor

As operações envolvendo quantias são efetuadas como as de números decimais, pois representamos as quantias por números decimais.

Exemplos:

⟶ Ganhei Cr$ 20,00 pela primeira etapa de um trabalho realizado e Cr$ 15,00 pela segunda etapa. Quanto recebi ao todo?

Cr$ 20,00 + Cr$ 15,00 = Cr$ 35,00

$$\begin{array}{r} 20,00 \\ +\ 15,00 \\ \hline 35,00 \end{array}$$

Resposta: Recebi ao todo Cr$ 35,00.

⟶ Um caderno de 80 folhas custa Cr$ 0,50 a menos que outro de 100 folhas. Se o caderno de 100 folhas custa Cr$ 2,30, quanto custa o caderno de 80 folhas?

Cr$ 2,30 — Cr$ 0,50 = Cr$ 1,80

$$\begin{array}{r} 2,30 \\ -\ 0,50 \\ \hline 1,80 \end{array}$$

Resposta: O caderno de 80 folhas custa Cr$ 1,80.

→ Júlio ganha Cr$ 250,00 por mês. Quanto ganhará em um ano?

Um ano tem 12 meses

Logo:

$12 \times$ Cr\$ 250,00 = Cr\$ 3.000,00

$$\begin{array}{r} 250{,}00 \\ \times\ 12 \\ \hline 500 \\ 250 \\ \hline 3.000{,}00 \end{array}$$

Resposta: Júlio ganhará Cr$ 3.000,00 em um ano.

→ Paguei por 8 lápis Cr$ 2,00. Quanto custou cada lápis?

Cr\$ 2,00 $\div$ 8 = $\square$

Cr\$ 2,00 $\div$ 8 = Cr\$ 0,25

$$\begin{array}{r|l} 2{,}00 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}25 \\ 0 & \end{array}$$

Resposta: Cada lápis custou Cr$ 0,25.

Aplicações práticas: troco, lucro, prejuízo, juros, papéis que valem dinheiro.

Troco: é o dinheiro que se recebe quando se paga uma mercadoria com moedas ou cédulas superiores ao preço.

A habilidade de efetuar troco envolve o pensamento aditivo e é um processo de contagem que parte da quantia gasta para a quantia dada em pagamento.

Exemplo:

→ Comprei um livro por Cr$ 5,50 e dei Cr$ 10,00 para pagá-lo. Recebi de troco Cr$ 4,50.

Posso conferir o troco assim:

$$\begin{array}{rl} \text{Cr\$}\ \ 5{,}50 & \longrightarrow \text{preço do livro} \\ +\ \text{Cr\$}\ \ 4{,}50 & \longrightarrow \text{troco} \\ \hline \text{Cr\$}\ 10{,}00 & \longrightarrow \text{dinheiro que dei para pagar} \end{array}$$

O troco pode também ser calculado usando-se o processo subtrativo (partir da quantia dada e subtrair a quantia gasta; o resultado será o troco).

Exemplo:

➡ Ronaldo comprou um livro por Cr$ 5,50 e deu Cr$ 10,00 para pagá-lo. Quanto recebeu de troco?.

Cálculo do troco

□ = troco

Cr$ 10,00 — Cr$ 5,50 = □

$$\begin{array}{r} 10,00 \\ -\ 5,50 \\ \hline 4,50 \end{array}$$

Resposta: Ronaldo recebeu de troco Cr$ 4,50.

Lucro: é o que se ganha na venda de um determinado produto, excluídas todas as despesas.

Exemplo:

➡ Comprei um terreno por Cr$ 500,00 e vendi-o, um ano depois, por Cr$ 825,00. Qual foi o meu lucro?

□ ⟶ lucro

Cr$ 500,00 + □ = Cr$ 825,00

□ = Cr$ 825,00 — Cr$ 500,00

□ = Cr$ 325,00

$$\begin{array}{r} 825,00 \\ -\ 500,00 \\ \hline 325,00 \end{array}$$

Resposta: Meu lucro foi de Cr$ 325,00.

Prejuízo: é o que se perde na venda de um determinado produto, ou quando ele sofre estrago, avaria ou desvalorização.

Exemplo:

➡ Ao terminar com a criação de galinhas do meu sítio, vendi-as por Cr$ 70,00. Sabendo-se que quando iniciei a criação gastei Cr$ 109,00, tive lucro ou prejuízo? De quanto?

Cr$ 109,00 ⟶ Cr$ 70,00
(gasto inicial) (venda)

Vendi por menos; logo, tive prejuízo.

□ ⟶ prejuízo

Cr$ 109,00 — Cr$ 70,00 = □

Cr$ 39,00 = □

$$\begin{array}{r} 109,00 \\ -\ 70,00 \\ \hline 39,00 \end{array}$$

Resposta: Meu prejuízo foi de Cr$ 39,00.

Juros: é a quantia correspondente ao rendimento de dinheiro emprestado por banco, financeira etc.

Exemplo:

Qual o juro produzido por Cr$ 1.200,00 durante um ano, rendendo 24% ao ano?

1% de Cr$ 1.200,00 = Cr$ 12,00 (Cr$ 1.200,00 ÷ 100)

24% de Cr$ 1.200,00 = 24 × Cr$ 12,00

24% de Cr$ 1.200,00 = Cr$ 288,00

$$\begin{array}{r} 12{,}00 \\ \times\ 24 \\ \hline 48\ \ \\ 24\ \ \ \ \\ \hline 288{,}00 \end{array}$$

O juro produzido foi de Cr$ 288,00.

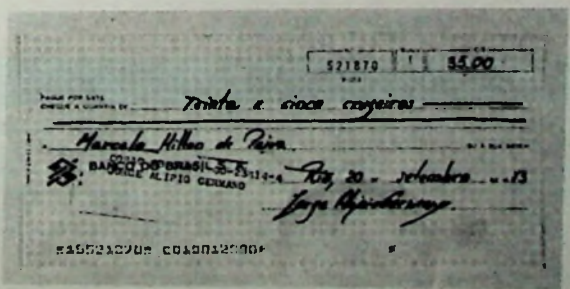
Papéis que valem dinheiro.

Há diversos tipos de papéis que valem dinheiro: cheques, notas promissórias, duplicatas etc.

Para guardar determinada quantia em dinheiro nos bancos, você abre uma conta em seu nome. Para pagar a pessoas, compras etc., você se utiliza de cheques. **Cheque** é uma ordem de pagamento. Você autoriza o banco a pagar uma quantia a uma determinada pessoa, se o cheque for nominal, e a qualquer pessoa se o cheque for ao portador.

Itens do preenchimento de um cheque:

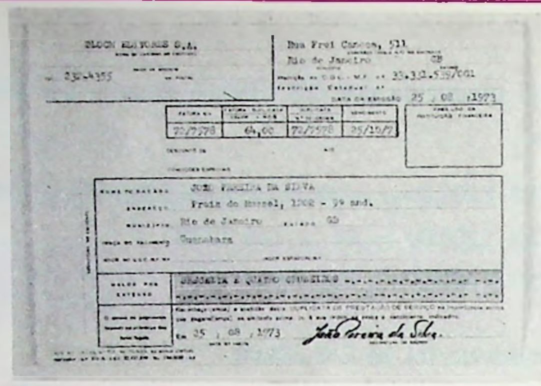
1. quantia em algarismos
2. quantia escrita, por extenso, em palavras
3. nome da pessoa a quem se destina o cheque (nominal) ou se o espaço for deixado em branco, o cheque fica ao portador.
4. localidade e data em que se está emitindo o cheque.
5. assinatura do emitente (pessoa que dá o cheque).



NOTA: O cheque não pode ter rasuras, isto é, não pode ser emendado.

Quando se compra mercadorias a prazo, o vendedor manda para o comprador uma duplicata.

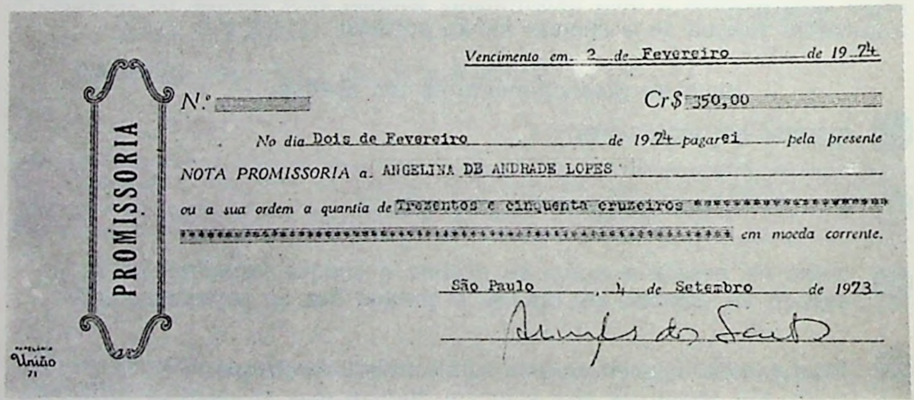
Duplicata: é um documento que diz o total da dívida assumida e o prazo para pagamento. O comprador assina a duplicata (2 vias) assumindo, assim, a obrigação de pagar dentro do prazo marcado.



Quando compramos mercadorias a prazo ou pedimos dinheiro emprestado em um banco, podemos também assinar **Notas Promissórias.**

Nota Promissória é um documento que encerra uma promessa de pagamento.

Na nota promissória há muitas vezes necessidade de haver a assinatura de um ou mais avalistas, que são as pessoas que garantem o pagamento da dívida.



PROMISSORIA

Vencimento em 2 de Fevereiro de 1974

N.º

Cr$ 350,00

No dia Dois de Fevereiro de 1974 pagarei pela presente NOTA PROMISSORIA a ANGELINA DE ANDRADE LOPES ou a sua ordem a quantia de Trezentos e cinquenta cruzeiros em moeda corrente.

São Paulo, 4 de Setembro de 1973

RECORDANDO...

COMPRIMENTO		
NOMES	**SÍMBOLOS**	**CORRESPONDÊNCIA**
Quilômetro	km	1.000 m
Hectômetro	hm	100 m
Decâmetro	dam	10 m
Metro	m	1 m
Decímetro	dm	0,1 m
Centímetro	cm	0,01 m
Milímetro	mm	0,001 m

SUPERFICIE		
NOMES	SIMBOLOS	CORRESPONDÊNCIA
Quilômetro quadrado	km^2	1.000.000 m^2
Hectômetro quadrado	hm^2	10.000 m^2
Decâmetro quadrado	dam^2	100 m^2
Metro quadrado	m^2	1 m^2
Decímetro quadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro quadrado	cm^2	0,000.1 m^2
Milímetro quadrado	mm^2	0,000.001 m^2

AGRARIAS			
NOMES	SÍMBOLOS	VALORES EM ARES	CORRESPONDÊNCIA EM M^2
Hectare	ha	100 a	10.000 m^2
Are	a	1 a	100 m^2
Centiare	ca	0,01 a	1 m^2

VOLUME		
NOMES	SIMBOLOS	CORRESPONDÊNCIA
Quilômetro cúbico	km^3	1.000.000.000 m^3
Hectômetro cúbico	hm^3	1.000.000 m^3
Decâmetro cúbico	dam^3	1.000 m^3
Metro cúbico	m^3	1 m^3
Decímetro cúbico	dm^3	0,001 m^3
Centímetro cúbico	cm^3	0,000.001 m^3
Milímetro cúbico	mm^3	0,000.000.001 m^3
Quilolitro	$k\ell$	1.000 ℓ
Hectolitro	$h\ell$	100 ℓ
Decalitro	$da\ell$	10 ℓ
Litro	ℓ	1 ℓ
Decilitro	$d\ell$	0,1 ℓ
Centilitro	$c\ell$	0,01 ℓ
Mililitro	$ml\ell$	0,001 ℓ

MASSA		
NOMES	**SÍMBOLOS**	**CORRESPONDÊNCIA**
Quilograma	kg	1.000 g
Hectograma	hg	100 g
Decagrama	dag	10 g
Grama	g	1 g
Decigrama	dg	0,1 g
Centigrama	cg	0,01 g
Miligrama	mg	0,001 g

TEMPO		
NOMES	**SÍMBOLOS**	**CORRESPONDÊNCIA**
Hora	h	3.600s ou 60 min
Minuto	min	60s
Segundo	s	1s

VELOCIDADE		
SINAL	**ESCRITA**	**LEITURA**
km/h	80 km/h	Oitenta quilômetros por hora

VALOR		
SINAL	**ESCRITA**	**LEITURA**
Cr$	Cr$ 10,50	Dez cruzeiros e cinqüenta centavos

NOTAS PARA O PROFESSOR

O professor, ao elaborar exercícios, deverá seguir as disposições legais, contidas em portaria emitida pelo INPM.

Dar especial atenção às unidades de medidas mais empregadas, como: km, m, cm, km^2, m^2, ha, m^3, dm^3, ℓ, kg, g, h, min, s.

O professor, ao dar reduções de unidades de medida para os alunos, deverá fazê-lo através de problemas reais e não reduções do tipo: km para mm.

As operações deverão ser efetuadas com as unidades mais usadas e reduções simples.

Das medidas agrárias: hectare, are e centiare, deverá ser dada maior ênfase ao ha (hectare), pois é mais usada que o are e o centiare na vida prática.

Os tipos de relógios, bem como os de balanças, poderão ser apresentados à turma apenas como curiosidade, não havendo necessidade de defini-los.

A medida de velocidade foi introduzida com o objetivo de levar o aluno a calcular aproximadamente o tempo gasto em distâncias percorridas.

UNIDADE 7

GEOMETRIA

OBJETIVOS

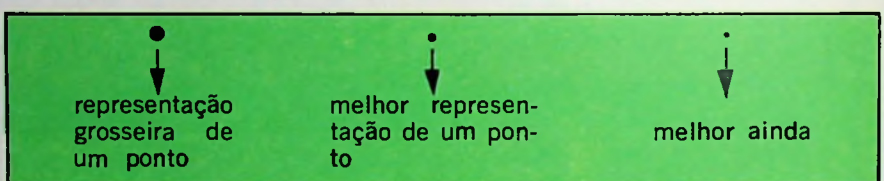
1. Reconhecer e empregar a terminologia precisa em relação a ponto e reta.
2. Reconhecer figuras planas.
3. Reconhecer sólidos geométricos, sabendo caracterizá-los por seus elementos.
4. Calcular o perímetro e a área de figuras planas e volume de sólidos, aplicando o cálculo em situações concretas e de importância na vida prática do aluno.

DESENVOLVIMENTO

PONTO, RETA

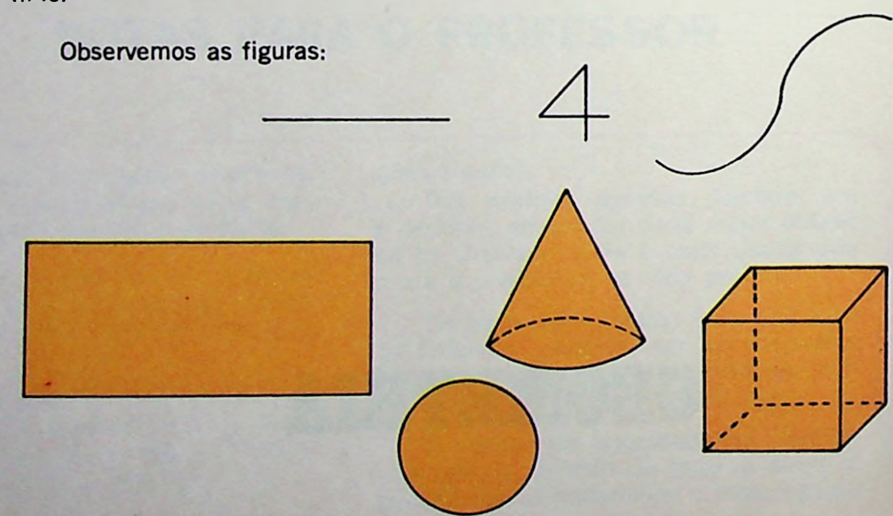
Até agora trabalhamos com conjuntos de números. Em Geometria, o nosso universo será o conjunto de pontos.

Se fizermos uma marca num papel, com um lápis bem apontado, estaremos representando a idéia de um **Ponto.**



Já temos a idéia formada do que seja um **ponto,** sem, contudo, defini-lo.

Observemos as figuras:

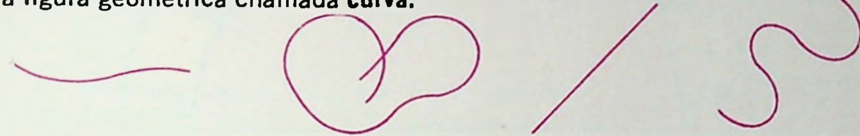


Cada uma destas figuras é um conjunto de pontos. Estas figuras são chamadas de **Figuras Geométricas.**

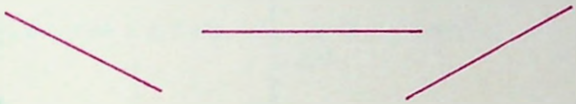
Todo desenho que fizermos será uma "representação de uma idéia geométrica", mas para simplificar este termo diremos:

"O PONTO" **"A RETA"** **"CONJUNTO DE PONTOS"**

Deslocando a ponta do lápis pela folha de papel, estaremos desenhando a figura geométrica chamada **curva.**



Se, ao desenharmos uma **curva,** deslizarmos a ponta do lápis ao longo de uma régua, sugeriremos a idéia de uma **reta.**

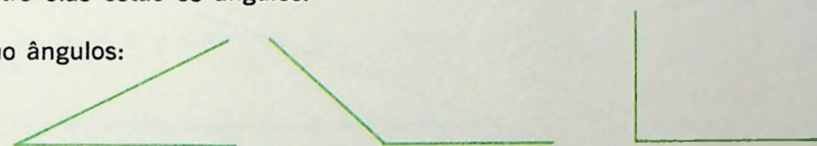


ANGULOS

Algumas figuras geométricas recebem nomes especiais.

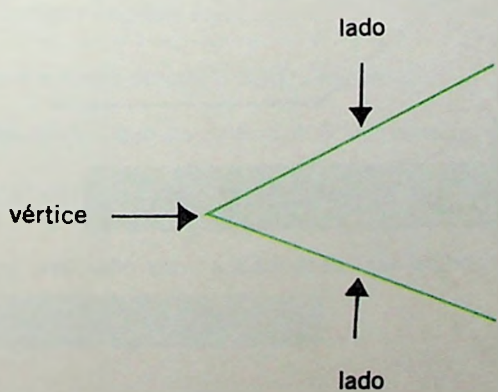
Entre elas estão os ângulos.

São ângulos:



Cada ângulo possui elementos, que são os lados e o vértice.

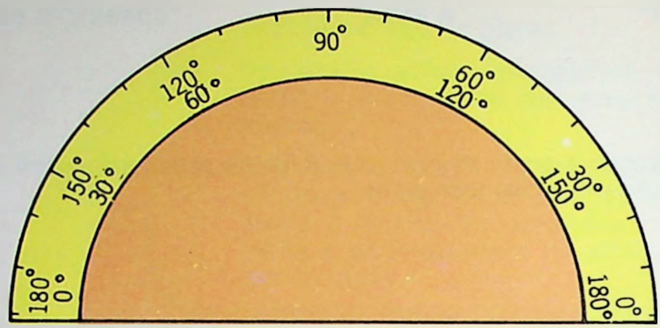
Assim temos:



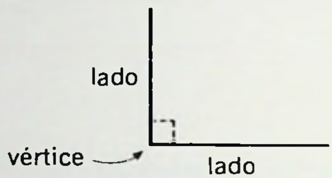
Podemos medir ângulos e esta medida é expressa, geralmente, em graus (unidade de medida de ângulo). O simbolo do grau é: º

exemplo: 90º — lê-se: noventa graus.

O instrumento usado para medir ângulos é o **transferidor.** Apresentamos o desenho de um transferidor, só por curiosidade.

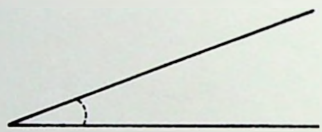


Dizemos que um ângulo é **reto** se sua medida for 90º. Exemplo:



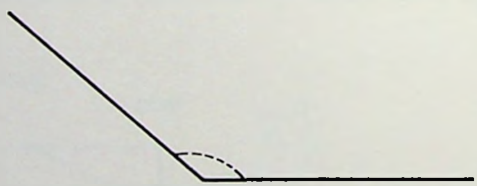
Dizemos que um ângulo é **agudo** se sua medida for menor que 90º.

Exemplo:



Dizemos que um ângulo é **obtuso** quando sua medida for maior que 90º.

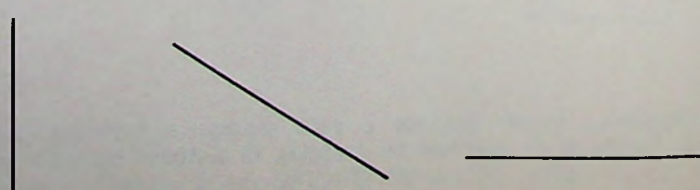
Exemplo:



RETAS VERTICAIS, HORIZONTAIS E INCLINADAS

As retas, no plano, podem ser "desenhadas" nas posições: vertical, horizontal e inclinada.

Exemplo:



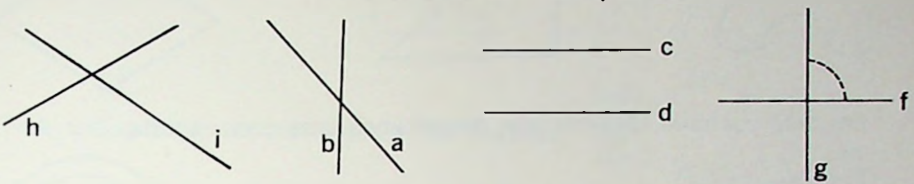
reta vertical

reta inclinada

reta horizontal

RETAS PARALELAS, PERPENDICULARES E OBLÍQUAS

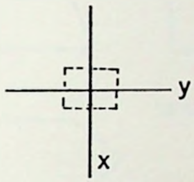
Quando traçamos duas ou mais retas, elas poderão ter pontos em comum ou não, como podemos observar nos exemplos abaixo:



Notamos que as retas **a** e **b** como também as retas **g** e **f** e **h** e **i**, têm um ponto em comum, isto é, elas se interceptam.

As retas **g** e **f** têm um ponto em comum e formam ângulos retos.

Diz-se, então, que **g** e **f** são retas **perpendiculares.**



x e **y** são retas perpendiculares, pois formam ângulos retos.

As retas **a** e **b** têm um ponto comum e não formam ângulos retos.

As retas **h** e **i** têm um ponto comum e também não formam ângulos retos.

Diz-se, então, que: **a** e **b** são retas oblíquas
h e **i** são retas oblíquas

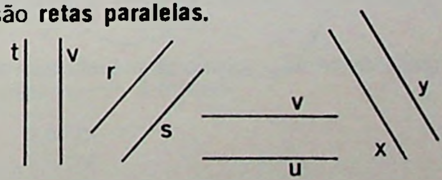
Duas retas são perpendiculares quando têm um ponto comum e formam ângulos retos.

Duas retas são oblíquas quando têm um ponto comum e não formam ângulos retos.

As retas **c** e **d** não possuem ponto em comum.

Dizemos, então, que as retas **c** e **d** são **retas paralelas.**

São exemplos de retas paralelas:

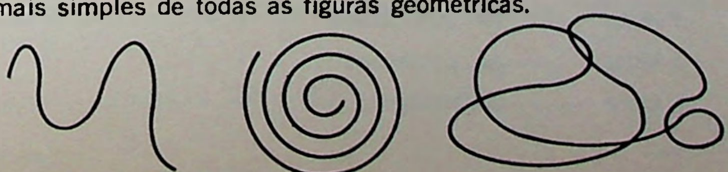


CURVAS E FIGURAS PLANAS

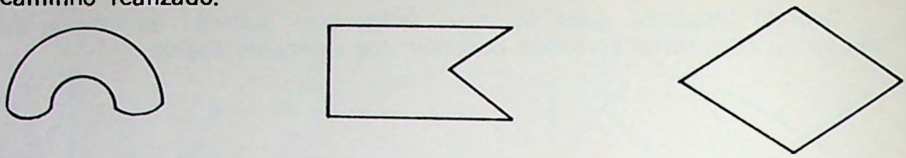
Curvas

Curva é a mais simples de todas as figuras geométricas.

Exemplos:

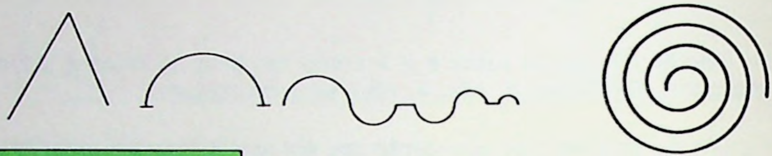


As curvas podem ser fechadas ou abertas. Curvas fechadas são aquelas em que, ao desenhá-las, deslocamos o lápis a partir de um ponto inicial, sem levantar o lápis do papel, e chegamos ao ponto inicial, sem voltar pelo caminho realizado.



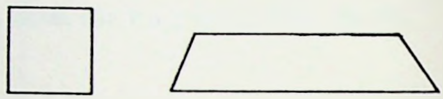
Em caso contrário, dizemos que desenhamos uma curva aberta.

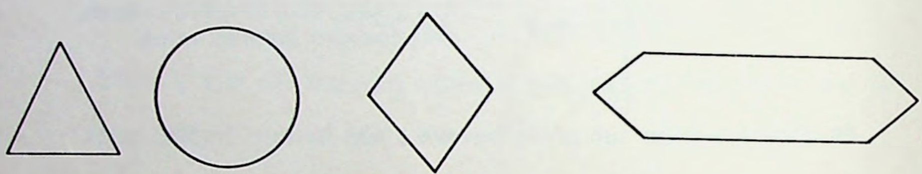
Exemplo:



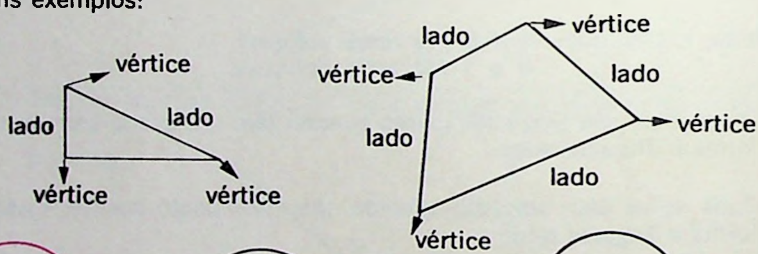
Figuras geométricas planas

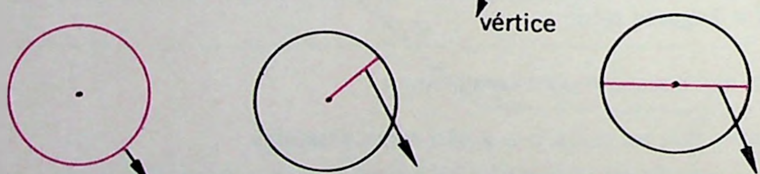
São **figuras geométricas planas:**





Os elementos das figuras planas recebem nomes especiais. Vejamos alguns exemplos:





circunferência

raio (é a distância do centro à circunferência).

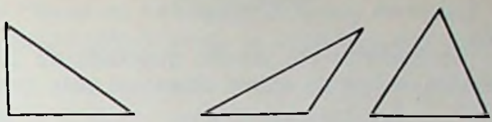
diâmetro (é uma parte da reta que vai de um lado a outro de uma circunferência, passando pelo seu centro).

As figuras geométricas planas, conforme o número de lados que possuem, recebem os nomes:

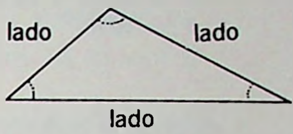
3 lados ⟶ triângulo
4 lados ⟶ quadrilátero
5 lados ⟶ pentágono
6 lados ⟶ hexágono
etc.

Triângulos

Triângulo tem três lados.

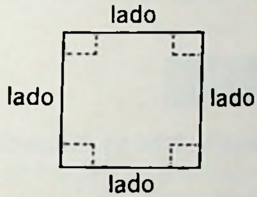


Todo triângulo possui três lados e três ângulos.

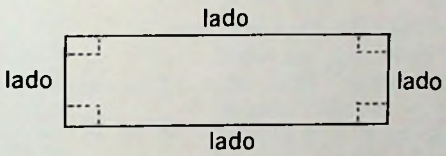


Quadrado e retângulo

Quadrado tem quatro lados de mesmo comprimento e os quatro ângulos retos.



Retângulo tem quatro lados de mesmo comprimento dois a dois e quatro ângulos retos.

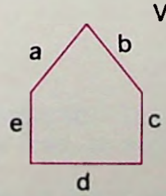


PERÍMETRO

Perímetro de uma figura geométrica plana é a soma das medidas de seus lados.

Muitas vezes precisaremos lançar mão desta noção na vida prática, como por exemplo: quando queremos saber quantos metros de arame necessitamos para cercar um terreno; quando queremos saber quantos metros de renda precisamos para colocar em volta de um pano de bandejá e em outras situações mais.

Vamos calcular o perímetro da figura abaixo:



a = 2,5 cm
b = 2,5 cm
c = 2,0 cm
d = 3,0 cm
e = 2,0 cm

Podemos representar o perímetro por P. Então:

P = medida de **a** + medida de **b** + medida de **c** + medida de **d** + + medida de **e**

P = 2,5 cm + 2,5 cm + 2,0 + 3,0 cm + 2,0 cm

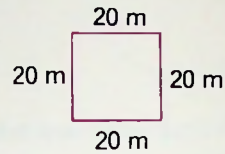
P = 12 cm.

Perímetro do quadrado

Sabemos que o quadrado tem os quatro lados de mesmo comprimento.

Se tivermos um terreno quadrado de 20 m de lado podemos calcular quantos metros de arame usaremos para cercá-lo:

$P = 20\text{ m} + 20\text{ m} + 20\text{ m} + 20\text{ m}$
$P = 80\text{ m}$



Para achar o perímetro do quadrado, nós adicionamos as medidas dos quatro lados.

Como esta medida é a mesma nos quatro lados, adicionamos 4 vezes 20 m. Então:

$$P = 20\text{ m} + 20\text{ m} + 20\text{ m} + 20\text{ m} = 80\text{ m}$$

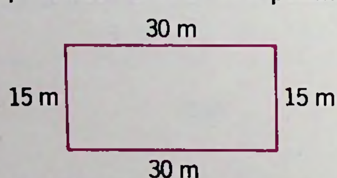
ou

$$P = 4 \times 20\text{ m} = 80\text{ m}$$
$$P = 80\text{ m}$$

Perímetro do retângulo

Sabemos que o retângulo tem os lados de mesmo comprimento dois a dois.

Se tivermos um terreno retangular cujos lados medem 15 m e 30 m, podemos calcular seu perímetro:



$P = 30\text{ m} + 30\text{ m} + 15\text{ m} + 15\text{ m}$

$P = 90\text{ m}.$

Para achar o perímetro do retângulo nós adicionamos as medidas dos quatro lados.

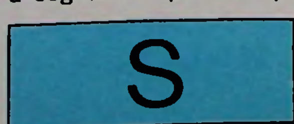
Como as medidas são as mesmas duas a duas, adicionamos 2 vezes cada medida. Então:

$$P = \underbrace{30\text{ m} + 30\text{ m}} + \underbrace{15\text{ m} + 15\text{ m}}$$
$$P = \underbrace{2 \times 30\text{ m}} + \underbrace{2 \times 15\text{ m}}$$
$$P = 60\text{ m} + 30\text{ m}$$
$$P = 90\text{ m}.$$

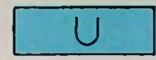
MEDIDAS DE SUPERFÍCIE — ÁREA

Podemos medir superfícies planas comparando-as com outra superfície tomada como unidade.

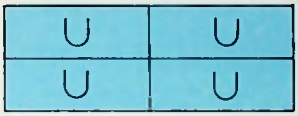
Imaginemos a seguinte superfície que queremos medir:



Podemos compará-la a outra superfície tomada como unidade. Escolhamos a seguinte superfície como unidade:



Vemos que a unidade cabe exatamente 4 vezes na superfície que queremos medir.



medida da superfície

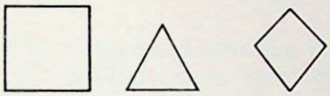
(S) = 4 unidades (u)

medida de S = 4 u

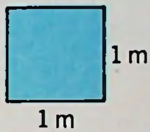
Área é o número que mede uma superfície numa determinada unidade.

Podemos escolher qualquer superfície para unidade.

Exemplo:

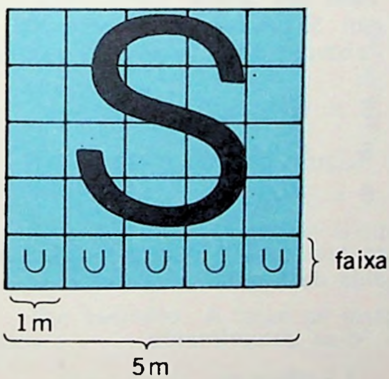


Escolhemos para unidade fundamental das medidas de superfície a região interior do quadrado de 1 metro de lado.



Área do quadrado

Se quisermos calcular a área de uma sala quadrada de 5 m de lado, podemos tomar como unidade de medida o quadrado que possui 1 m de lado:



$u = 1\ m^2$

$S = 25\ m^2$

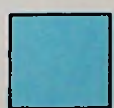
Isto é, há 25 quadrados de 1 m de lado no quadrado de 5 metros de lado. Separando a sala em faixas, vemos que cada faixa possui 5 u e como são 5 faixas ao todo, a área da sala é:

$S = (5 \times 5)\ u$

$S = (5 \times 5)\ m^2$

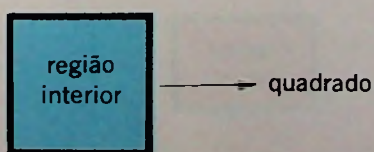
$S = 25\ m^2$

Observamos que a área de um quadrado é obtida multiplicando a medida do lado por ela mesma.

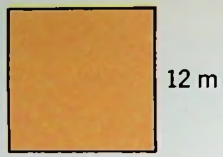


$$\boxed{S = (l \times l)\ u = l^2\ u}$$

OBSERVAÇÃO: Quando dizemos área de um quadrado, estamos nos referindo à área da região interior do quadrado.



→ Vamos calcular agora a área de um quadrado com 12 m de lado:



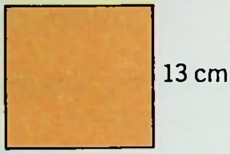
$l = 12\ m$

$S = (l \times l)\ u = l^2\ u$

$S = (12)^2\ m^2$

$S = 144\ m^2$

→ Calculemos agora a área de um quadrado com 13 cm de lado:



$l = 13\ cm$

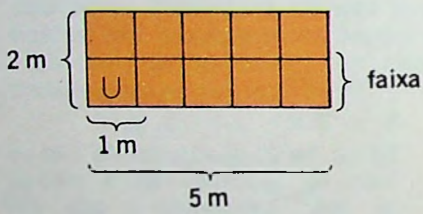
$S = l^2$

$S = (13)^2\ cm^2$

$S = 169\ cm^2$

Área do retângulo

→ Se quisermos calcular a área de uma varanda retangular com 5 m de comprimento por 2 m de largura, podemos tomar como unidade de medida um quadrado com 1 m de lado.



$u = 1\ m^2$

$S = 10\ m^2$

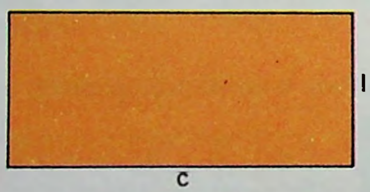
Observando o desenho ao lado notamos que a varanda foi separada em faixas. Cada faixa possui 5 unidades e, como são 2 faixas ao todo, a área da varanda é:

$S = (2 \times 5)\ u$

$S = (2 \times 5)\ m^2$

$S = 10\ m^2$

Observamos, então, que a área de um retângulo é obtida multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura.

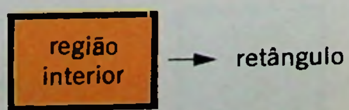


c = comprimento

l = largura

$S = c \times l$

OBSERVAÇÃO: Quando dizemos área de um retângulo, estamos nos referindo à área da região interior do retângulo.



Vamos calcular áreas de outras superfícies retangulares:

→ Calcular a área de uma saleta com 1 m de largura e 2 m de comprimento.

$c = 2\,m$

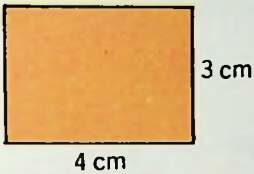
$l = 1\,m$

$S = c \times l$

$S = (2 \times 1)\ m^2$

$S = 2\,m^2$

→ Calcular a área de um retângulo com 4 cm de comprimento por 3 cm de largura.



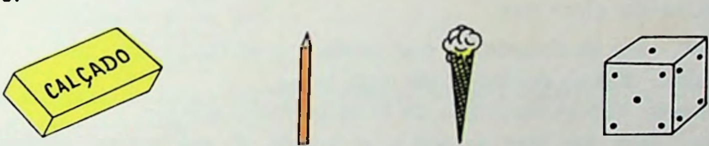
$S = c \times l$

$S = (4 \times 3)\ cm^2$

$S = 12\,cm^2$

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Observe uma caixa de sapatos, um lápis, uma casquinha de sorvete e um dado.



Todos esses objetos ocupam um lugar no espaço (esse espaço em que vivemos).

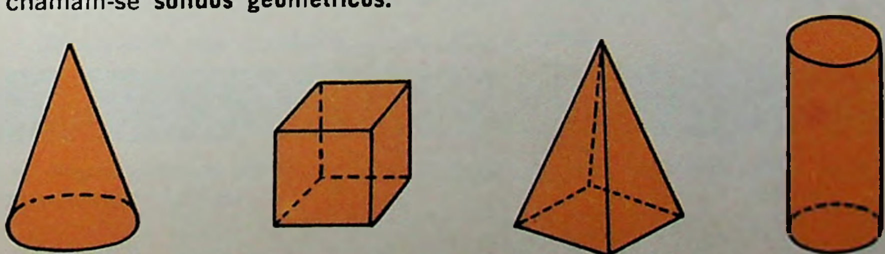
Nós podemos encontrar muitos outros objetos com formas parecidas com estas.

Por exemplo: A caixa de fósforos tem a mesma forma da caixa de sapatos.

→ cano de água

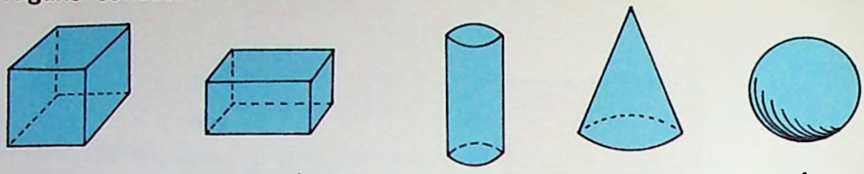
Os canos da pia têm a mesma forma do lápis.

Estes objetos lembram figuras geométricas. Estas figuras geométricas chamam-se **sólidos geométricos.**



Cubo, paralelepípedo, cone, cilindro e esfera

Alguns sólidos:

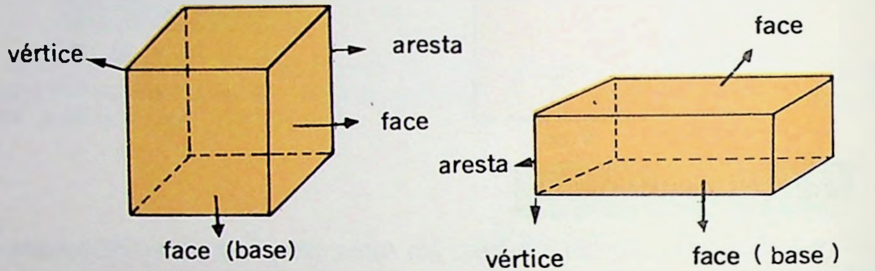


cubo | paralelepípedo | cilindro | cone | esfera

Elementos: face, aresta, vértice

Podemos analisar os sólidos através de seus elementos.

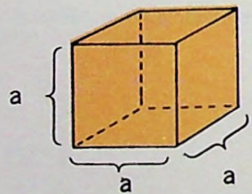
Por exemplo: O cubo e o paralelepípedo têm: faces, arestas, vértices



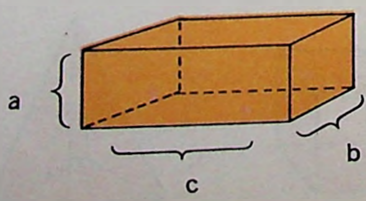
Podemos, então, dizer que:

Faces: são as superfícies que limitam o sólido.
Arestas: são os encontros de duas faces.
Vértices: são os encontros de duas ou mais arestas.
Base: face em que se apóia o sólido. É um nome especial que recebe uma das faces. Não é um novo elemento do sólido geométrico.

No cubo todas as faces são quadrados, por isso todas as arestas têm o mesmo comprimento.



No paralelepípedo todas as faces são retângulos, por isso as arestas não terão todas o mesmo comprimento.

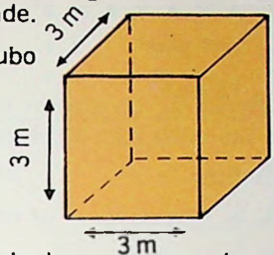


Medidas de volume

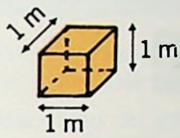
Podemos medir sólidos geométricos comparando-os com outros sólidos tomados como unidade.

Volume do cubo

Exemplos:

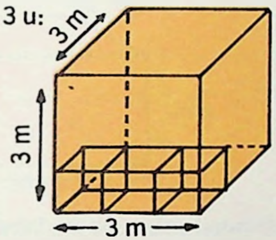


→ Se quisermos calcular o volume de um tanque de forma cúbica de 3 m de aresta, podemos tomar como unidade de medida o cubo que possui 1 m de aresta.



$u = 1 \text{ m}^3$

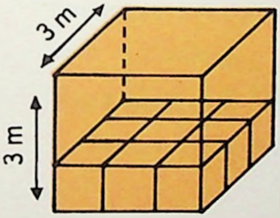
Separando a base do tanque em faixas, sobre cada faixa estarão apoiados 3 u:



$u = 1 \text{ m}^3$

$3 \text{ u} = 3$ cubos de 1 m^3

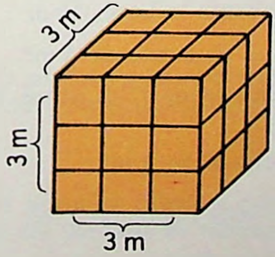
Como há 3 faixas ao todo, estarão apoiados sobre a base 9 u:



$9 \text{ u} = 9$ cubos de 1 m^3

$3 \times 3 = 9$ (cubos de 1 m^3)

Considerando a altura do tanque, vemos que há 3 vezes 9 u, isto é, 27 u:



$27 \text{ u} = 27$ cubos de 1 m^3

$3 \times 3 \times 3 = 27$ (cubos de 1 m^3)

$V = (3 \times 3 \times 3) \text{ u}$

$V = (3 \times 3 \times 3) \text{ m}^3$

$V = 27 \text{ m}^3$

Há, portanto, 27 cubos de 1 m de aresta no tanque de 3 m de aresta.

Observamos que o volume de um cubo é obtido:

MEDIDA DA ARESTA × MEDIDA DA ARESTA × MEDIDA DA ARESTA

Representando por **V** o volume do cubo e por **a** a medida da aresta, podemos também indicar:

$$V = a \times a \times a = a^3$$

→ Vamos calcular o volume de um cubo com 4 dm de aresta.

$$a = 4\ dm$$
$$V = a \times a \times a = a^3$$
$$V = (4)^3\ dm^3$$
$$V = 64\ dm^3$$

→ Calculemos o volume de um cubo com 5 cm de aresta.

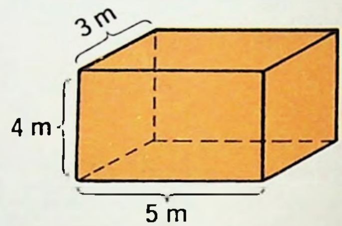
$$a = 5\ cm$$
$$V = a \times a \times a = a^3$$
$$V = (5)^3\ cm^3$$
$$V = 125\ cm^3$$

Volume do paralelepípedo

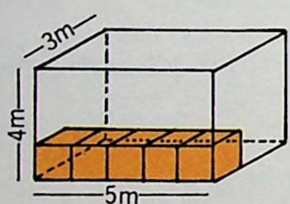
→ Se quisermos calcular o volume de uma caixa-d'água com a forma de um paralelepípedo de medidas 3 m, 4 m, 5 m podemos tomar como unidade de medida o cubo que possui 1 m de aresta.

Exemplo:

$u = 1\ m^3$



Separando a base da caixa-d'água em faixas, sobre cada faixa estarão apoiados 5 u:



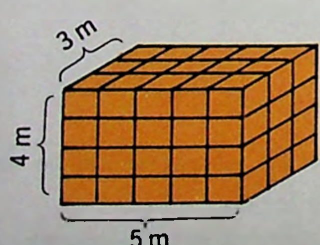
$u = 1\ m^3$

$5u = 5$ cubos de $1\ m^3$

Como há 3 faixas ao todo, estarão apoiados sobre a base, 15 u:

$15\ u = 15$ cubos de $1\ m^3$ $\qquad 5 \times 3 = 15$ cubos de $1\ m^3$

Considerando a altura da caixa, vemos que há 4 vezes 15 u, isto é, 60 u:



$60\ u = 60$ cubos de $1\ m^3$

$5 \times 3 \times 4 = 60$ cubos de $1\ m^3$

$V = (5 \times 3 \times 4)\ u$

$V = (5 \times 3 \times 4)\ m^3$

$V = 60\ m^3$

Há, portanto, 60 cubos de 1 m de aresta na caixa-d'água de medidas: 5 m, 3 m e 4 m.

Observamos que o volume de um paralelepípedo é obtido:

MEDIDA DA ARESTA × MEDIDA DA ARESTA × MEDIDA DA ARESTA

Representaremos por **V** o volume do paralelepípedo. Sabendo que as suas arestas têm medidas diferentes, podemos representar estas medidas por **a, b, c.**

Indicaremos, então: $\boxed{V = a \times b \times c}$

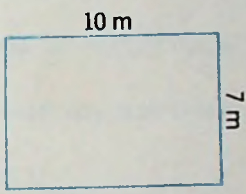
→ Vamos calcular o volume de um paralelepípedo de medidas 2 cm, 3 cm e 7 cm.

a = 2 cm	$V = a \times b \times c$
b = 3 cm	$V = (2 \times 3 \times 7)\ cm^3$
c = 7 cm	$V = 42\ cm^3$

TRABALHANDO COM PERÍMETRO, ÁREA E VOLUME

→ Quero cercar de arame um terreno retangular. O lado maior mede 10 m e o lado menor mede 7 m. Quanto gastarei sabendo-se que o metro de arame custa Cr$ 1,20?

Teremos que calcular o perímetro deste terreno já que queremos cercá-lo (medida em volta).



$P = 10\,m + 10\,m + 7\,m + 7\,m$

$P = (2 \times 10\,m) + (2 \times 7\,m)$

$P = 20\,m + 14\,m$

$P = 34\,m$

O perímetro do terreno é 34 m. Precisarei comprar 34 m de arame.

1 m custa Cr$ 1,20

34 m custarão

□ = 34 × Cr$ 1,20

Gastarei Cr$ 40,80.

$$\begin{array}{r} \text{Cr\$}\ 1{,}20 \\ \times\quad 34 \\ \hline 480 \\ 360 \\ \hline \text{Cr\$}\ 40{,}80 \end{array}$$

O professor deverá levar o aluno a encaminhar o problema através de uma sentença matemática.

A primeira etapa é calcular o perímetro do terreno. Depois calcular o preço do número de metros de arame gasto.

Tudo isto poderá ser expresso pela sentença:

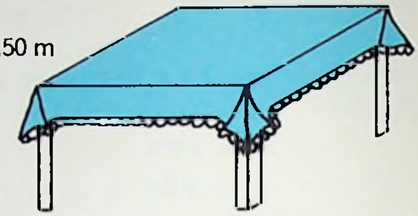
□ = P × Cr$ 1,20 □ = preço do arame gasto

$\boxed{\square = [\,(2 \times 10) + (2 \times 7)\,] \times \text{Cr\$ } 1{,}20}$

Esta é a sentença que exprime, exatamente, o problema dado.

→ Vamos colocar galão em volta de uma toalha quadrada com 1,50 m de lado.

Quantos metros gastarei de galão?



$P = 1{,}50\ m + 1{,}50\ m + 1{,}50\ m + 1{,}50\ m$

$P = (4 \times 1{,}50)\ m$

$P = 6\ m$

Sentença matemática

$\square = P$

$\square = 4 \times l$ $\qquad l \longrightarrow$ lado da toalha

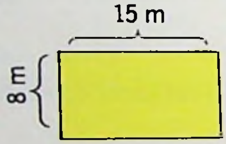
$\square = (4 \times 1{,}50)\ m$

O perímetro da toalha é 6 m. Precisarei de 6 m de galão.

→ Tenho um terreno retangular com 15 m de comprimento e 8 m de largura.

Quero gramá-lo e sei que cada placa quadrada de grama mede 50 cm de lado.

Quantas-placas precisarei para gramar todo o meu terreno?



Vamos, primeiro, calcular a área do terreno:

$S = c \times l$ $\qquad \longrightarrow$ largura do terreno

$S = (15 \times 8)\ m^2$

$S = 120\ m^2$

Calcularemos, a seguir, a área da placa de grama (quadrada):

$S = L^2$ $\qquad L \longrightarrow$ lado da placa de grama

$S = (50)^2\ cm^2$ $\qquad S = 2.500\ cm^2$

Como a unidade da área do terreno está em m^2 e a unidade da área da placa está em cm^2, precisaremos mudar a unidade da área da placa de cm^2 para m^2: $2.500\ cm^2 = 0{,}25\ m^2$.

Vamos, agora, calcular quantas placas de grama vou precisar:

Uma placa ocupa $0{,}25\ m^2$.

Uma determinada quantidade de placas ocupam $120\ m^2$.

Devemos determinar esta quantidade de placas.

$\square \longrightarrow$ placas que precisarei.

$\square = 120\ m^2 \div 0{,}25\ m^2$

$\square = 480$ placas

$$\begin{array}{r|l} 120{,}00 & 0{,}25 \\ \cline{2-2} 20\,0 & 480 \\ 00 & \end{array}$$

Sentença matemática:

$\square$ = área do terreno ÷ área da placa

$\square = (c \times l) \div L^2$

$\square = (15 \times 8)\ m^2 \div (50)^2\ cm^2$

Precisarei, portanto, de 480 placas para gramar todo o meu terreno.

→ Quantos litros de água precisarei para encher uma caixa cúbica com 20 dm de aresta?

Volume da caixa-d'água:

$V = a^3$

$V = (20)^3\ dm^3$

$V = 8.000\ dm^3$

1 litro $= 1\ dm^3$

$8.000\ dm^3 = 8.000$ litros

Sentença matemática:

$\square = V$

$\square = a^3$

$\square = (20)^3\ dm^3$

Precisarei de 8.000 litros de água para encher a caixa cúbica.

→ Qual o volume de um reservatório com a forma de um paralelepípedo de medidas 14 dm, 10 dm e 8 dm?

$a = 8\ dm$

$b = 10\ dm$

$c = 14\ dm$

$V = a \times b \times c$

$V = (8 \times 10 \times 14)\ dm^3$

$V = 1.120\ dm^3$

Sentença matemática:

$\square = (8 \times 10 \times 14)\ dm^3$

O volume do reservatório é de $1.120\ dm^3$.

Perímetro

Quadrado	$P = 4 \times l$
Retângulo	L → lado maior l → lado menor $l + l + L + L$

Área

Quadrado	$S = l^2$
Retângulo	$S = c \times l$

Volume

Cubo	$V = a^3$	**Paralelepípedo**	$V = a \times b \times c$

NOTAS PARA O PROFESSOR

Em Geometria, o objetivo maior é levar o aluno a reconhecer as formas das figuras planas e sólidas mais usadas.

Os conceitos de perímetro e área podem ser melhor compreendidos usando-se como modelos as medidas de sala, pátio da escola, quintal, sítio, terreno etc.

Nos problemas que envolvem medidas de volume utilizar exemplos usuais de caixa-d'água, tanque, reservatório etc.

MATERIAL DE CONSULTA

SANGIORGI, Osvaldo
Matemática 1 — Curso Moderno.
Matemática 3 — Curso Moderno.
Matemática 5 — Guia do Professor.
Matemática 5 — Exercícios.

AZEVEDO DE, Aroldo; PASCHOAL Cegalla, DOMINGOS; SILVA, Joaquim; SANGIORGI, Osvaldo
Programa de Admissão.

DI PIERRO NETTO, Sapione
Matemática na Escola Renovada — Volume 1.

ASIS NAME, Miguel
Matemática — 5.ª série.

A. ZAMBUZZI, Orlando
Matemática Com Estudo Dirigido — 5.ª série.

DI PIERRO NETTO, Sapione; F. DA SILVA MUNHOZ, Alda; NANO, Vanda; IKIEZAKI, Iracema
O Trabalho Dirigido no Ensino da Matemática.

CONDÉ LAMPARELLI, Lydia; P. CANTON, Adolfo Walter; MORETHIN, Pedro Alberto; FONTES, INDIANI, Dalva
Matemática Para o Ginásio — Volume 1.

COMENALLI Marques; JOSÉ, Francisco
Matemática — Volume 1.

ROCHA, Mauro Luiz; MADSEN BARBOSA, Ruy
Matemática 1.

FERNANDO, Ary; MORAES, Fernando; BRANDÃO, Luiz
Matemática 5.

G. CHAVES, J.
Ensino Moderno de Matemática — 1.º Volume.

PERELBERG Liberman, Manhúcia; BECHARA Sanchez, Lucília
Uma Iniciação à Matemática.

AVERBUCH, Ana; COHEN Gottlieb, Franca; BECHARA Sanchez, Lucília; PERELBERG Liberman, Manhúcia
Curso Moderno de Matemática Para o Ensino do 1.º Grau — Volume 5.

BECHARA, Lucília; PERELBERG Liberman, Manhúcia
Curso Moderno de Matemática Para a Escola Elementar — Volumes 1, 2, 3, 4 e 5.

H. D'AUGUSTINE, Charles
Métodos Modernos Para o Ensino de Matemática.

CASTRUCCI, Benedito
Elementos de Teoria dos Conjuntos.

LIPSCHUTZ, Seymour
Teoria dos Conjuntos.

AYRES, Frank
Álgebra Moderna.

REVISÃO
VILMA DE MOURA RANGEL NEY

NORMALIZAÇÃO GRÁFICA
VILMA CUNHA